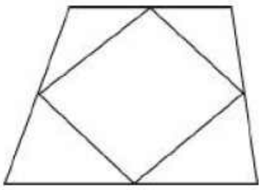
수학교육론 기출문제

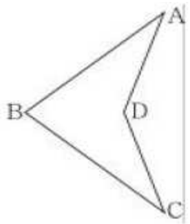
정현민

박문각 임용고시학원

1. 다음의 가상 상황을 읽고 아래 물음에 답하시오. (총 6점) [2002]



미현이는 학교에서 평면 위에 있는 사각형의 네 변의 중점을 이으면 평행사변형이 된다는 정리를 공부하였다. 미현이는 이 정리를 바탕으로 다음과 같은 문제를 제기하였다.

> 오른쪽 그림과 같이 한 평면 위에 있지 않는 공간에서의 네 점 A, B, C, D를 차례로 연결하여 만든 도형에서 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$의 중점을 각각 E, F, G, H라 할 때, 사각형 $EFGH$는 평행사변형일까?
>
> 
>

1-1. 미현이가 제기한 문제의 내용이 옳은지의 여부를 판단하고 그 이유를 설명하시오. (1점)

1-2. 이러한 문제제기(problem posing) 활동의 수학교육적 의미를 세 가지만 진술하시오. (2점)

1-3. 이러한 문제제기 활동의 수리철학적 의미를 Lakatos의 준경험주의(quase-empiricism) 입장에서 설명하시오. (3점)

2. 다음은 수행평가의 한 유형인 <프로젝트>에서 사용할 수 있는 가상적인 소재이다.

A교사는 학생들에게 학교의 부지, 건물 등이 배치되어 있는 설계도를 가져와서 학생들을 소집단으로 구성하고 각 소집단별로 다음 과제를 해결하게 한다.

> 다음 주에는 건물이 배치되어 있는 장소를 제외하고 나머지 땅에 잔디를 깔려고 한다. 가능한 한 최소 비용으로 이 작업을 마치려면 어느 정도의 예산이 필요한가?

제 7차 수학과 교육과정의 세 가지 일반 목표 중에서, A 교사가 위와 같은 수행평가를 실시했을 때 달성하고자 하는 목표와 가장 가까운 것 한 가지를 쓰시오. (4점) [2002]

3. 20세기초 영국의 J. Perry, 미국의 E. H. Moore, 독일의 F. Klein등에 의해 주도된 <수하교육 근대화 운동>은 Euclid <원론>의 교육방식에 대한 비판이 주된 관심사였다. Euclid <원론>의 교육방식에 대한 이들 세 학자의 공통적인 비판을 세 가지로 요약하여 제시하시오. (5점) [2002]

①

②

③

4. 다음은 고등학교에서 롤(Rolle)의 정리를 도입하기 전에 실물자료, OHP 또는 컴퓨터를 통해 학생들에게 제시할 실세계 상황이다. 다음 물음에 답하여라. (총5점) [2002]

> 땅에서 공중으로 쏘아올린 어떤 물체(공 또는 로켓)가 a초 후에 땅에 떨어진다고 할 때, 이 물체의 속도(velocity)가 0이 되는 시각이 존재한다.

4-1. 위의 상황을 롤의 정리와 관련지어 설명하시오. (2점)

4-2. 위와 같이 수학적 개념을 지도하는데 있어서 상황(context)과 관련짓는 교수·학습의 장점을 세 가지로 요약하여 제시하시오. (3점)

①

②

③

5. 제7차 수학과 교육과정 중, 국민 공통 기본 교육과정의 '4. 교수·학습 방법'에서는 보충 과정과 심화 과정의 학습을 효율화하기 위하여 유의 사항을 제시하고 있다. 다음의 기본 과정을 지도한 후에 보충·심화 과정을 지도하려고 한다. 다음 물음에 답하시오. (총 6점) [2003]

> [7-가 단계]
> 대영역 : 수와 연산
> 중영역 : 자연수의 성질
> 소영역 : 최대공약수와 최소공배수를 구할 수 있다.

5-1. 보충 과정의 내용 구성에 대한 유의 사항을 한 가지 제시하고, "최소공배수 구하기" 보충 과정 지도에 사용할 문제를 하나 만드시오. (3점)

5-2. 심화 과정의 내용 구성에 대한 유의 사항을 한 가지 제시하고, "최소공배수 구하기" 심화 과정 지도에 사용할 문제를 하나 만드시오. (3점)

6. 다음과 같은 [문제]와 [학생 A의 풀이]에 대하여 주어진 [채점기준]으로 평가하려고 한다.
[학생 A의 풀이]에 타당한 점수를 [채점기준]에 근거하여 쓰고, 그 점수를 부여한 이유를 학생이 사용한 추론 양식과 관련하여 30자 이내로 서술하시오. (4점) [2003]

[채점기준]
1점 - 문제이해 부족, 부정확한 수학적 표현
2점 - 그럴듯한 추론, 관찰을 수반한 풀이
3점 - 명확한 추론, 풀이과정의 경미한 실수
4점 - 명확한 추론, 바른 답

[문제]
성숙한 토끼 한 쌍은 한 달이 지나면 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼 한 쌍은 2개월 후부터 매달 한 쌍의 토끼를 낳기 시작한다고 한다. 1월 1일에 성숙한 토끼 한 쌍을 사서 기르기 시작하면, n개월 후에는 몇 쌍의 토끼가 있게 되는가?
(단, 토끼들은 죽지 않는다고 가정한다.)

[학생 A의 풀이]
1개월 후부터 4개월 후까지 토끼의 쌍의 수를 세어보았더니 다음과 같다.

$$2, 3, 5, 8$$

이 수열은 제1계차가 $1, 2, 3, \cdots$인 등차수열이므로 n번째 항은

$$a_n = 2 + \{1+2+3+ \cdots + (n-1)\} = \frac{n^2-n+4}{2}$$

따라서, n개월 후의 토끼의 쌍의 수는 $\frac{n^2-n+4}{2}$이다.

7. 다음에 제시된 수업 상황을 읽고 물음에 답하시오. (총 5점) [2003]

다은이는 다음 문제를 해결하려고 애쓰고 있다.
『학교에서 집까지의 거리는 $200m$이고, 집에서 경찰서까지의 거리는 $250m$이다. 집에서 학교와 경찰서를 바라본 각의 크기가 $60°$일 때, 학교에서 경찰서까지의 거리를 구하여라.』
잠시 후 교사가 다가와 다음과 같이 말하였다.
“다은아, 제2코사인 법칙을 적용하면 되지 않을까?”
다은이는 교사의 이러한 발문에 힘입어 문제를 쉽게 해결하였다.

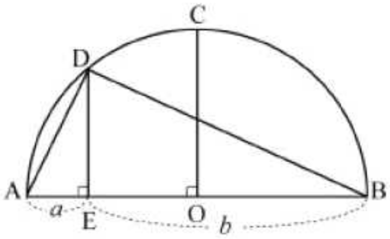
7-1. 폴리아(G. Polya)의 수학 문제해결 교육론의 관점에서 볼 때, 교사가 다은이에게 한 발문이 바람직한 것인지 아닌지를 판단하고, 판단의 구체적인 이유를 교사의 발문과 관련하여 두 가지 서술하시오. (3점)

7-2. 교수학적 변환(didactic transposition)의 관점에서 위에 제시된 수업 상황을 20자 내외로 평가하시오. (2점)

8. 수학 교사 A, B의 다음 대화를 읽고 물음에 답하시오. (총 5점) [2003]

> 교사 A : 저는 학생들이 수학의 각 영역의 관련성을 인식하도록 가르치는 것이 바람직하다고 생각합니다. 예를 들면, 추상적인 식을 시각화한 자료는 식을 직관적으로 이해하게 해줄 뿐 아니라 대수와 기하의 연결성을 인식하게 하는 데에도 도움이 될 것입니다.
>
> 교사 B : 참 좋은 말씀입니다. 저는 수학의 역사가 수학을 가르치는 데 도움이 된다고 생각합니다. 예를 들면, "기존의 체계에서 인정된 성질이 그대로 유지 되도록 하면서 체계를 확장하는 원리"가 수학의 역사상 수 체계의 확장에 유용하게 활용되었습니다. 이 원리는 학교에서 음수의 연산 법칙을 유도하거나 지수의 확장을 가르칠 때 활용될 수 있습니다.

8-1. 교사 A는 부등식 $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}\,(a>0,\, b>0)$를 가르칠 때 사용하려고 다음 자료를 만들었다. 다음 그림이 어떻게 위의 부등식을 나타내고 있는지 설명 하시오. (단, 그림에서 점 O는 원의 중심이다.) (1점)

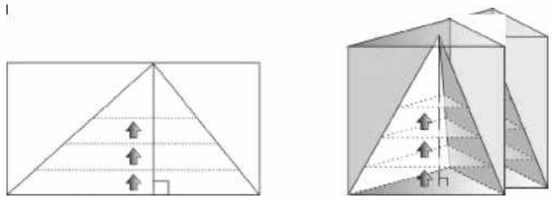


8-2. 교사 B는 다음 수학 시간에 지수의 확장을 가르치고자 한다. 교사 B의 진술에 들어 있는 원리를 사용하여, 지수의 정의를 지수가 자연수인 경우로부터

'$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (단, $a \neq 0$, n은 자연수)'

로 확장해 가는 과정을 서술하시오. (4점)

9. A학생이 B학생에게 삼각뿔의 부피를 구하는 공식이 (밑면의 넓이)×(높이)×1/3임을 아래와 같이 설명하였다. 다음 물음에 답하시오. (총 5점) [2004]

> [그림 1]과 같이 삼각형이 직사각형에 내접해 있고, [그림 2]와 같이 삼각뿔이 삼각기둥에 내접해 있는 경우를 생각해 보자.
>
> 
>
> [그림 1] [그림 2]
>
> 삼각형이 넓이를 구하는 공식이 (밑면의 넓이)×(높이)×1/2인 것은 잘 알고 있지?
> [그림 1]의 삼각형을 보면, 화살표를 따라 위로 올라갈수록 그 폭이 점점 줄어드니까 삼각형의 넓이는 외접하는 직사각형의 넓이보다 당연히 작지? 마찬가지로 [그림 2]의 삼각뿔을 보면 위로 올라갈수록 단면의 넓이가 줄어드니까 삼각뿔의 부피도 외접하는 삼각기둥의 부피보다 작은 것이 당연해.
> [그림 1]과 [그림 2]는 모두 삼각형과 관련이 있어. 그리고 [그림 1]의 삼각형에는 밑변과 높이가 있는데, [그림 2]의 삼각뿔에는 밑면과 높이가 있어.
> 삼각뿔의 부피는 외접하는 삼각기둥의 부피의 절반보다 더 작아 보이니까 1/3쯤 될 것 같아.
> 그래서 삼각뿔의 부피를 구하는 공식은 삼각형의 넓이를 구하는 공식과 비슷하게 될 것 같지 않니? 즉 삼각형의 넓이를 구하는 공식에서 '밑변의 길이' 대신에 '밑면의 넓이'로 바꾸고 1/2을 1/3로 바꾸어서 (밑면의 넓이)×(높이)×1/3이 된다고 생각할 수 있겠지.

9-1. 앞의 설명은 A학생이 유추(유비추리)적 사고를 통하여 삼각뿔의 부피를 구하는 공식을 이해하고 있음을 보여 준다. A학생이 유추적 사고를 했다고 말할 수 있는 근거를 A학생의 말을 인용하여 설명하시오. (3점)

9-2. 만일 어떤 교사가 A학생처럼 유추적 사고를 통하여 특정 수학 내용을 직관적으로 이해하도록 지도했다면, 이를 보완하기 위하여 취할 수 있는 지도 방법을 쓰고, 그 방법이 유추적 사고의 어떤 측면을 보완할 수 있는지 설명하시오. (2점)

- 지도 방법 :
- 보완할 수 있는 측면 :

10. 다음은 제7차 수학과 교육과정에 속하는 내용의 일부를 제시한 것이다. 물음에 답하시오. (총 6점) [2004]

(가) 도수의 합이 다른 두 집단의 분포를 비교하는 방법에 대하여 알아본다. (7-나 단계)
(나) 실생활 문제에서 합동인 도형과 닮은 도형을 찾아본다. (8-나 단계)
(다) 식의 일부를 치환하여 전개하는 다항식의 곱셈을 할 수 있다. (9-가 단계)
(라) 자연 현상에서 주기적 상황을 조사하여 삼각함수와 관련시킬 수 있다. (10-나 단계)

10-1. 위의 (가)~(라)에는 공통적인 특징이 있다. 이러한 특징을 가지는 내용을 교육과정에서 1가지만 쓰시오. (단, 7-가 단계에서 10-나 단계까지의 내용 중, 실생활의 문제를 해결하는 것에 관한 내용 이외의 것으로 제시하시오.) (1점)

10-2. 현재 7-나 단계에서 상대도수에 관한 내용이 다뤄지고 있다. 상대도수의 개념을 처음 지도할 때와 (가)의 내용을 지도할 때 적합한 문제 상황의 구체적인 예를 각각 하나씩 제시하시오. (2점)
- 상대도수의 개념을 처음 지도할 때 :
- (가)의 내용을 지도할 때 :

10-3. 위의 (가), (다)와 같은 내용은 학생들의 학습 부담을 줄이려는 의도를 보여주는 예이다. 이처럼 학습 내용을 줄이려는 경향은 우리나라의 제4차 수학과 교육과정부터 나타나고 있다. 20세기 중반 이후의 수학교육의 발달사에 비추어 볼 때, 이러한 경향을 초래한 용인을 3가지만 제시하시오 (3점)
-
-
-

11. 다음은 수학 문제해결 교육과 관련하여 교사들이 주고받은 대화의 일부이다.

(1) 문제해결 지도를 위한 문제들은 실생활로부터 만들어진 문장제이어야 합니다.
(2) 수학 교과서에 나오는 전형적인 문제들도 적절히 변형시키면 문제해결 지도에 적합한 문제로 활용할 수 있다고 생각합니다.
(3) 문제해결 교육과 학생들의 수학적 사고의 훈련은 별로 상관이 없다고 생각합니다.
(4) 해법이 다양한 문제일수록 그 문제는 문제해결 지도에 적합한 문제가 된다고 생각합니다.
(5) 문제해결 지도는 일반적인 수학 수업과는 관련시키지 않는 것이 좋습니다.
(6) 문제해결을 잘 하기 위해서 수학 교과서에서 흔히 보는 연습 문제는 풀 필요가 없다고 생각합니다.

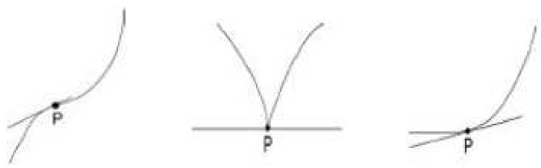
대화 내용 중 문제해결 교육과 관련하여 옳지 않게 말한 대화의 번호를 3개만 쓰고, 각각에 대하여 옳지 않다고 생각하는 이유를 설명하시오. (총 5점) [2004]
-
-
-

12. 교사가 학생들에게 '둘레의 길이가 100m인 도형의 넓이'라는 조건을 사용하여 조별로 문제를 만들고 해결하여 발표하고, 보고로도 제출하게 하였다. 이 때 가능한 한 일상 생활이나 다른 분야와 연계된 풍부한 배경을 가진 문제를 만들도록 하였다.

A교사는 학생들의 조별 발표를 관찰하고 보고서를 검토하면서 수학적 의사소통 능력에 초점을 두어 평가하려고 한다. 이 때, 수학적 의사소통 능력을 평가하기 위한 항목을 2가지만 쓰시오. (총 4점) [2004]
-
-

[13~14] 다음은 제7차 수학과 교육과정 수학Ⅱ의 다항함수의 미분법 중 미분계수 영역에 대한 수행평가 결과에서 나타난 오류 유형과 오류를 바로 잡기 위한 교수 방안이다.

(가) 박 교사는 미분계수를 가르친 후, 학생들이 미분계수의 기하학적 의미를 이해하고 있는지를 알아보기 위하여 몇 개의 그래프를 주고 주어진 점 P에서 접선을 그리도록 하였다. 그 결과 나타난 대표적인 오류 유형은 다음과 같다.



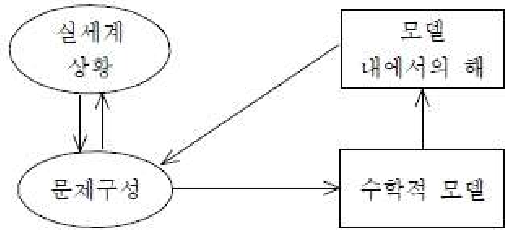
(나) 박 교사는 평가결과를 분석한 후 프로이덴탈(Freudenthal)의 수학화 교수 학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 수업을 하는 것이 미분계수에 대한 개념적 이해와 접선 개념에 대해 학생들이 가지고 있는 장애 수정에 도움이 될 것이라 생각했다.

13. (가)에서의 수행평가 결과에서 나타난 오류의 원인을 인신론적 장애(epistemlolgical obstacle)의 관점에서 3줄 이내로 설명하시오. (3점) [2005]

14. 프로이덴탈의 수학화 교수 학습 방법과 미분 개념의 역사발생적 과정을 토대로 미분계수 개념의 교수·학습을 위한 내용 요소를 순서를 고려하여 3가지 제시하시오. (4점) [2005]

-
-
-

15. 다음 그림은 실세계 상황을 수학적 모델로 표현하여 문제를 해결하는 수학적 모델링 과정이다.



아래에 제시된 실세계 상황과 이 상황으로부터 구성된 문제를 중학교 수준에서 해결하기 위한 수학적 모델을 2가지 제시하시오. (2점) [2005]

실세계 상황 : 철수는 생일을 맞이하여 친구 5명을 생일 모임에 초대하였다. 모임에 참석한 6명이 서로 악수를 나누고 있다.

문제 : 모임에 참석한 6명이 빠지지 않고 모두 악수를 할 때 악수는 몇 번 이루어지는가?

16. 다음은 문제설정(problem posing)에 관한 설명이다.

> 브라운(Brown)과 월터(Walter)는 “만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?(what-if-not)라는 문제설정 전략을 제시하였다. 이들이 제시하는 문제설정 전략은 출발점 선택, 속성 나열하기, “만일 그렇지 않으면 어떻게 될까?”를 이용한 문제설정, 문제 해결의 단계로 이루어진다.

김 교사는 피타고라스 정리를 일반화한 것이 제이코사인 법칙이라는 것을 보이기 위한 수업을 진행하고자 한다. 이 때, 위의 문제설정 전략에 따라 설정할 수 있는 문제를 하나 제시하고, 설정된 문제를 해결하시오. (단, 문제해결 과정을 식으로 제시할 것) (5점) [2005]

17. 다음에 주어진 상황을 읽고, 피아제(Piaget)의 균형(평형) 이론에 비추어 밑줄 친 (a)와 (b)의 장면에서 학생의 상태를 해석하시오. (3점) [2005]

> 김 교사는 학생들에게 확률 개념을 지도하였다. 이 수업 후에 A학생에게 주사위를 한 번 던져서 1의 눈이 나올 확률은 얼마인지 물었을 때 (a)<u>학생은 $\frac{1}{6}$이라고 답하였다.</u> 다음에 교사는 똑같은 2개의 동전을 던질 때 모두 앞면이 나올 확률이 얼마인지 물어보았고, 이 학생은 전체 경우의 수가 3이므로 확률이 $\frac{1}{3}$이라고 답하였다. 이에 대하여, (b)<u>교사는 전체 경우의 수가 4이므로 정답은 $\frac{1}{4}$이라고 말하였다.</u>

• (a) 장면 :

• (b) 장면 :

18. 다음은 라카토스(Lakatos)의 준경험주의 입장과 수학적 지식의 성장 과정을 요약한 것이다.

> (가) 수학은 ‘추측-증명-반박’의 논리에 의한 추측의 ‘끊임없는 개선을 통해 성장하는 준경험 과학이다.
> (나) 라카토스가 제시한 수학적 지식의 성장 과정은 다음과 같다.
> 1단계 : 수학적 추측을 제기하는 단계
> 2단계 : 추측을 부분추측으로 분해하는 단계 (사고실험)
> 3단계 : 반례가 등장하고 추측과 증명을 반박하는 단계
> 4단계 : 증명을 검토하여 증명과 추측을 개선하는 단계

<보기>는 어떤 학생의 추측과 증명을 나타낸 것이다. 위 (나)의 3, 4단계를 근거로 잠정적으로 참으로 받아들일 수 있는 개선된 추측과 그 과정을 제시하시오. (4점) [2005]

<보 기>

<소박한 추측>
미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때 $x=a$에서 극값을 갖는다.

<증명(사고실험)>
1단계 : 미분가능한 함수 $f(x)$는 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀐다.
2단계 : $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 이 함수는 $x=a$에서 극값을 갖는다.

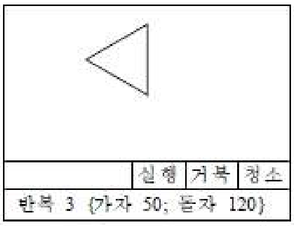
19. 다음은 컴퓨터를 활용한 수학 수업에 대하여 김 교사가 갖고 있는 신념이다.

> 수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 귀납적 발견을 위하여 컴퓨터를 활용하는 활동은 그 목적을 분명히 해야 한다. 컴퓨터의 시각적·조작적 기능은 학생이 수학에 보다 쉽게 접근할 수 있게 해 주지만, 이것만으로는 부족하고 조작에 대한 반성이 반드시 요구된다.

김 교사는 로고(LOGO)와 비슷한 소프트웨어를 활용하여 '정n각형의 외각의 합은 360°이다'라는 명제를 지도하고자 한다. 김 교사가 시범을 보인 한 변의 길이가 50인 정삼각형을 그리는 활동과 기본 명령어는 다음과 같다.

<정삼각형을 그리는 활동>
'반복 3 {가자 50; 돌자 120}'이라고 입력한 후 화면의 '실행'버튼을 누른다.

<초기화면>



<완성된 화면>

<기본 명령어>
가자 x : 거북이 이동하면서 길이가 x인 선분을 그린다.
돌자 y : 거북의 진행 방향을 y°만큼 시계반대반향으로 바꾼다.
반복 $n\{\cdots\}$: 괄호 안에 있는 명령어를 n번 반복하여 실행한다.
거북 : 화면의 거북을 사라지게 하거나 다시 나타나게 한다.

김 교사는 이후에 학생들에게 위의 소프트웨어를 활용하여 정사각형과 정오각형을 그려보게 하였다. 학생들이 주어진 명제를 발견하기 위해 자신의 탐구 활동을 반성하여 반드시 알아내야 하는 사실을 2가지 제시하시오. (5점) [2005]

-
-

20. 다음은 폴리아(G. Polya)가 문제해결과 관련하여 말한 '보조문제'에 대한 설명이다.

> 제시된 문제에 대한 풀이의 발견은 원래의 문제를 해결하는 데 도움을 줄 수 있는 적절한 보조문제에 좌우되는 경우가 많다. 보조문제를 생각함으로써 여러 가지 이득을 얻을 수 있다. 보조문제의 결과가 현재의 문제 해결의 실마리가 될 수도 있고, 보조문제를 해결한 방법이 현재의 문제해결에 이용될 수도 있다.

<보기>에서 ①이 ②의 보조문제가 될 수 있는지 판단하고, 그 이유를 구체적으로 쓰시오. (4점) [2006]

<보 기>

> ① 1부터 100까지의 자연수의 합 구하기
> ② 첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합 구하기.

- 판단 :
- 이유 :

21. 다음은 8-가 단계 수학에 있는 '유리수와 소수' 단원의 수업 계획을 교사의 관점에서 제시한 것이다.

<보 기>

> 학습 목표 : 유한소수로 나타내어지는 분수의 특징을 알 수 있다.
> 수업 계획 :
> ① 칠판에 학습 목표를 쓴다.
> ② 여러 가지 분수를 제시하고 그것을 소수로 나타내보게 한 후, 유한소수와 무한소수의 뜻을 설명한다.
> ③ 위의 분수 중에서 유한소수로 나타내어지는 분수와 무한소수로 나타내어지는 분수를 각각 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 어떤 특징을 가지는지 알아보도록 한다.

위의 수업 계획 중에서 ③을 사회적 구성주의의 지식관을 반영하여 진행하고자 한다. 이 때, 학생들이 객관화된 수학적 지식을 얻기까지 거쳐야 할 활동 과정을 쓰고, 그 결과 얻어져야 할 지식을 학습 목표와 관련하여 쓰시오. (5점) [2006]

- 활동 과정 :
- 지식 :

[22~23] 다음 두 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

> 김 교사 : 저는 수학 수업에서 지식의 구조, 곧 기본적인 아이디어를 다루는 것이 중요하다고 생각합니다. 그러한 아이디어는 학생의 사고양식에 맞게 세 가지 표현으로 재구성할 수 있습니다. 세 가지 표현을 이용하면 어떤 지식이든 어떤 수준의 학습자라도 이해할 수 있도록 적절한 형태로 제시할 수 있습니다.
>
> 박 교사 : 저는 지식의 표현 방법도 중요하지만, 그 지식의 지도 순서도 중요하다고 생각합니다. 그래서 저는 학생들에게 일반적인 개념이나 원리를 먼저 지도하고, 이 개념을 발판으로 하여 이어지는 학습 내용을 점점 특수화하고 세분화하는 형태로 지도할 때 학생들에게 의미 충실한 학습이 될 수 있다고 생각합니다.

22. 교사의 생각에 반영되어 있는 이론을 참고하여, 위의 대화에서 김 교사가 말한 ‘세 가지 표현’이 무엇인지 쓰시오. 그리고 김 교사가 “삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.”는 성질을 지도하고자 할 때, 가장 낮은 수준의 학생들도 이해할 수 있도록 삼각형 모양의 종이를 활용하여 이 성질을 표현하는 과정을 구체적으로 쓰시오. (4점) [2006]

- 세 가지 표현 :
- 과정 :

23. 박 교사는 다항식의 곱셈과 관련된 <보기>의 학습 내용을 ①에서부터 순서대로 지도하려고 한다. 이 때, 박 교사가 계획한 학습 내용의 지도 순서와 관련하여, 그의 생각에 반영되어 있는 학습 지도 원리를 쓰고, 그 원리에 입각하여 <보기>의 학습 내용 지도 순서를 구체적으로 해석하시오. (4점) [2006]

<보 기>

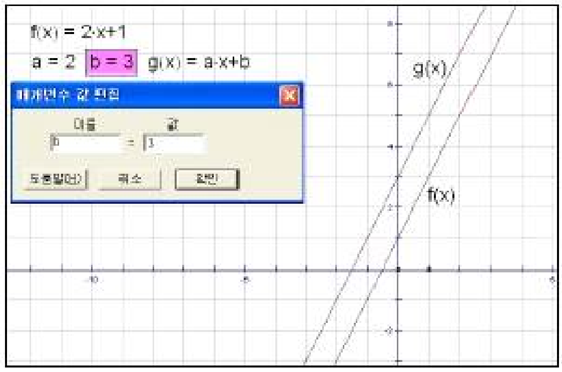
① $(a+b)(c+d)$의 전개
② $(a+b)^2$의 전개
③ 101^2의 계산

- 원리 :
- 해석 :

24. 최 교사는 “기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행하거나 일치한다.”는 학습 내용을 지도하려고 한다. 다음은 최 교사가 수업에 사용하기 위해 만든 학습 자료와 그 학습 자료를 활용한 학습 활동에 대한 계획이다.

<학습 자료>

탐구형 소프트웨어를 이용하여 컴퓨터 화면에 함수 $f(x)=2x+1$의 그래프를 그린다. 매개변수 입력창에 a, b의 값을 입력하면 그 값에 따라 새로운 함수 $g(x)=ax+b$의 그래프가 동일한 화면에 그려지도록 한다.



<학습 활동>

활동 ① : 위 학습 자료에서 a의 값을 2로 입력하여 고정한다.
활동 ② : b의 값에 3을 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.
활동 ③ : b의 값을 바꾸어 입력하여 $g(x)$의 그래프를 그리고, $f(x)$와 $g(x)$의 두 그래프 사이의 관계를 관찰한다.
활동 ④ : 활동 ③의 과정을 여러 번 반복해서 실행한다.

딘즈(Z. P. Dienes)가 제시하는 수학 학습 원리 중 ‘수학적 다양성의 원리’를 쓰고, 지도하려는 학습 내용에 대한 최 교사의 수업 계획을 수학적 다양성의 원리의 관점에서 평가하시오. (5점) [2006]

- 수학적 다양성의 원리 :
- 평가 :

25. 다음은 제 7차 수학과 교육과정의 ‘평가’ 항목에서 제시하고 있는 내용의 일부이다.

> ①객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고,
> ②주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가가 이루어질 수 있게 한다.

제 7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 학습 평가의 목적을 학생과 교사의 측면에서 각각 쓰고, 수학 학습 평가에서 ①에 비해 ②가 갖는 장점을 인지적 영역과 정의적 영역의 측면에서 각각 쓰시오. (4점) [2006]

- 목적 : (학생)
  (교사)
- 장점 : (인지적 영역)
  (정의적 영역)

[26~27] 음수 지도에 관한 다음 두 교사의 대화를 읽고 물음에 답하시오.

> 김 교사 : 음수 개념의 역사적 발생 과정을 살펴보면, 많은 수학자들이 음수를 수로 인정하기 어려워하였습니다. 학생들도 수학자들과 마찬가지로 ①음수개념과 그 연산의 의미를 크기 또는 양과 관련지어 파악하기 때문에 음수를 수로 받아들이기 어려워 합니다.
> 박 교사 : 동의합니다. 그래서 저는 먼저 ②구체적인 음수 지도 모델을 도입하고, 규칙성을 탐구하여 연산의 원리를 발견하는 ③귀납적 외삽법, 기존의 수 체계에서 성립하는 성질을 이용하여 음수를 논리적으로 정의하는 방식인 ④형식 불역의 원리(principle of the permanence of equivalent forms)를 이용하여 음수의 연산을 지도합니다.

26. ①의 예와 ②의 예를 각각 2가지 쓰시오. (4점) [2007]
- ①의 예 (2가지) :
- ②의 예 (2가지) :

27. ③에 따라 지도할 때 ‘$2\times(-1)=-2$’를 어떻게 설명하는지 쓰고, ④에 따라 지도할 때 ‘-1’을 어떻게 정의하는지 쓰시오. (4점) [2007]
- ‘$2\times(-1)=-2$’ 의 설명 :
- ‘-1’ 의 정의 :

28. 다음은 수학 7-나 단계에서 학습하는 내용 요소와 평가 문항이다. 다음에 제시된 평가 문항의 문제점을 보완하기 위해 면담을 이용한 평가를 계획하려고 한다.

> ① 내용 요소 : 히스토그램
> ② 평가 문항 : 도수분포표를 그래프로 나타낸 것을 무엇이라고 하는가?

①을 ②의 문항으로 평가할 때의 문제점을 쓰고, 면담을 이용한 평가의 의의를 쓰시오. 또한 ①을 면담에 의해 평가할 때 활용할 수 있는 ①과 직접 관련된 질문을 한 가지 쓰시오. (4점) [2007]
- 문제점 :
- 의의 :
- 질문 :

29. 다음은 제7차 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학 Ⅱ의 공간도형 영역에 대한 ‘학습 지도상의 유의점’이다.

> <학습 지도상의 유의점>
> ① 공간도형의 성질을 관찰과 직관에 의해 이해하도록 한다.
> ② 공간도형은 공리계를 사용하지 않고 간단히 다룬다.

‘공간에서 서로 다른 두 직선의 위치 관계’의 구체적인 학습 내용을 쓰고, 이 내용을 ①에 입각하여 도입하는 방법을 예를 들어 설명하시오. 또한 ②의 이유를 수학적 추론교육과 관련지어 쓰시오. (4점) [2007]

- 학습 내용 :
- 도입 방법 :
- 이유 :

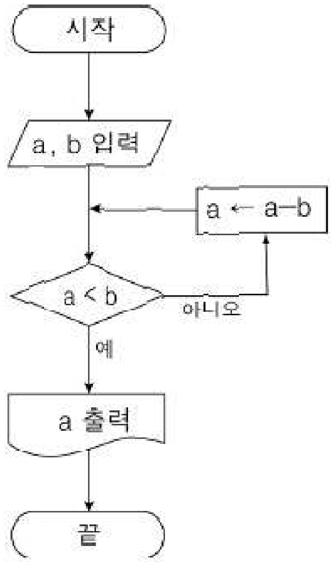
30. 다음은 무한수열의 수렴에 관한 수업에 앞서 최 교사가 교과서와 교사용지도서를 분석하면서 기록한 내용이다.

> ① 교과서에서는 직관적이고 자연스러운 사고에 따라 무한수열의 수렴을 정의한다.
> ② 지난해에 ①과 같이 정의를 배운 학생 중에는 ′$1, 1, 1, 1, \cdots$′과 같은 상수수열이 수렴하지 않는다는 오개념을 가진 경우가 있었다.
> ③ 바이어슈트라스(Weierstrass)는 엄밀하지만 <u>자연스러운 사고에 역행하는</u> 방식으로 무한수열의 수렴을 정의하였다.

①과 ③에서의 ‘무한수열의 수렴의 정의’를 각각 제시하고, 이를 토대로 최 교사가 ③에서 ‘자연스러운 사고에 역행한다’고 판단하는 근거를 쓰시오. 또한 ②에 제시된 오개념의 원인을 ①과 관련하여 구체적으로 쓰시오. (5점) [2007]

- ①의 정의 :
- ③의 정의 :
- 판단 근거 :
- 오개념의 원인 :

31. 알고리즘은 문제해결에 필요한 유한 번의 계산 절차 또는 처리 순서를 말한다. 음이 아닌 정수 a와 자연수 b에 대해 어떤 값을 구하는 알고리즘을 다음과 같이 순서도로 표현하였다.



이 알고리즘은 컴퓨터가 자료를 처리하는 특정 방식을 반영하고 있다. 수열의 정의에서 사용되기도 하는 이 방식이 무엇인지, 이 알고리즘이 입력값 a, b에 대하여 어떤 값을 출력하는지 각각 쓰시오. 그리고, 이미 익숙한 연산을 ‘알고리즘과 순서도’로 수학 교과서에 지도하는 의의를 이 사례와 관련하여 쓰시오. (5점) [2007]

- 방식 :
- 출력값 :
- 지도의 의의 :

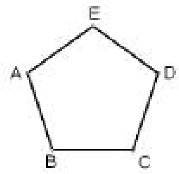
32. 제7차 수학과 교육과정에서는 '수학학습의 평가가 ①학생 개개인의 수학학습을 돕고, ②교사 자신의 수업 방법을 개선'하는 데 기여할 것을 평가 목적의 하나로 명시하고 있다. 다음 문항을 위에 기술한 평가 목적에 보다 부합하도록 재구성하고, 재구성한 근거를 ①과 ②의 관점에서 문항 내용과 관련지어 서술하시오. (단, 문항을 재구성할 때, 주어진 명제는 변형하지 않도록 한다.) (4점) [2008]

> 다음 명제의 참, 거짓을 판별하시오.
> 답 :
> 명제 : 이차 함수 $y=ax^2+bx+c$는 x절편과 y절편을 모두 갖는다.

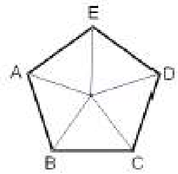
- 재구성 문항 :
- 재구성한 근거 :
  ①의 관점 :
  ②의 관점 :

33. 김 교사는 사회적 구성주의를 적용한 수학 수업을 실천해 왔다. 사회적 구성주의에서는 개인의 주관적 지식이 공표를 통해 사회에 알려지고 공적인 비판과 합의를 통해 객관적 지식으로 변환해 간다고 본다.
다음은 7-나 단계 '다각형의 내각의 크기의 합'에 관한 수업에서 김 교사와 학생들이 나눈 대화의 일부이다.

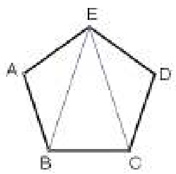
> 김 교사 : 이런 오각형에서 내각의 크기의 합이 얼마일지 생각해 봅시다. [그림 1]
> (학생들이 소집단 토론이 진행된다.)
> 김 교사 : 자, 이제 발견한 사실을 발표해 볼까요?
> 학생 A : 오각형의 내각의 크기의 합은 $5\times180°$가 됩니다.
> 김 교사 : 학생 A가 오각형의 내각의 크기의 합이 $5\times180°$라는 의견을 제시하였습니다. 이 의견에 대한 질문이 있습니까?
> 학생 B : 왜 $5\times180°$가 된다고 생각하는지 설명해 주세요.
> 학생 A : 이렇게 잘라서 각의 크기를 모두 합하면 $5\times180°$가 됩니다. [그림 2]
> 학생 B : 오각형을 이렇게 자르면 내각의 크기의 합이 $3\times180°$가 되는데요? [그림 3]



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

이 대화 속에서 학생 A와 학생 B는 각기 구별되는 주관적 지식을 제안하였다. 김 교사는 두 학생의 주관적 지식이 합의된 객관적 지식으로 변환해 가도록 안내하려고 한다. 안내 과정을 두 단계로 나누어, 김 교사가 각 단계별로 할 수 있는 주요한 질문과 그 질문의 의도를 사회적 구성주의의 관점에서 각각 제시하시오. (4점) [2008]
- 1단계 질문 :
- 1단계 질문의 의도 :
- 2단계 질문 :
- 2단계 질문의 의도 :

34. 스켐프(R. Skemp)는 수학적 개념에 대한 이해 유형의 일부로 도구적 이해와 관계적 이해를 비교하여 설명하였고, 수학 학습-지도에서는 궁극적으로 수학적 개념에 대한 관계적 이해를 목표로 해야 한다고 주장하였다.
김 교사가 학생들이 '이항'을 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 일차방정식 문제를 풀게 하였더니, 학생 A와 학생 B가 아래와 같이 동일한 방법으로 문제를 풀었다.

(문제) 방정식 $3x+7-19$를 풀어라.

(학생 A와 학생 B의 풀이)

$3x+7-19$

$3x=19-7$ ㉠

$3x=12$

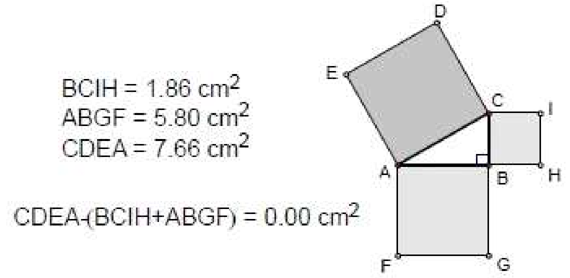
$x=4$

잠시 후 김 교사는 학생 A와 학생 B에게 ㉠의 과정을 각자 설명해 보라고 하였다. 김 교사는 두 학생의 설명을 듣고 나서, 학생 A는 '이항'에 대하여 도구적 이해를 하고 있고, 학생 B는 관계적 이해를 하고 있다고 판단하였다. 학생 A와 학생 B가 ㉠의 과정을 어떻게 설명했을지 각각 제시하시오. (단, 두 학생 모두 '이항'이라는 용어는 사용하지 않았고, 그 설명이 7-가 단계의 수준을 넘지 않았다고 한다.) (4점) [2008]

- 학생 A의 설명 :
- 학생 B의 설명 :

35. 다음은 공학 도구를 활용하여 피타고라스 정리의 기하학적 의미를 탐구하는 과정에서 김 교사와 학생들이 나눈 대화의 일부이다. (단, 모든 학생들의 수학 지식이 9-나 단계의 수준을 넘지 않는다고 한다.)

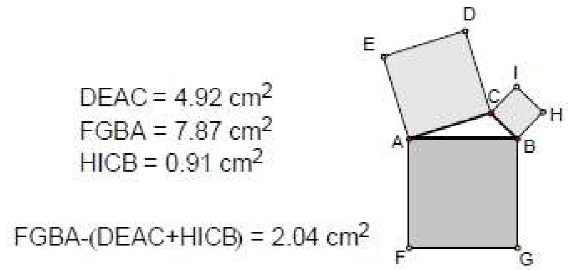
(김 교사는 공학 도구를 가지고 피타고라스 정리의 기하학적인 의미를 [그림 1]을 이용하여 설명한 후, 학생들에게 직접 작도하여 확인해 보도록 하였다.)



[그림 1]

(진영이는 실수로 [그림 2]와 같이 직각삼각형이 아닌 삼각형을 작도하여 관찰하고 있다.)

진영 : (혼잣말로) 이렇게 그린 다음 …이것을 움직이면 …음…… .



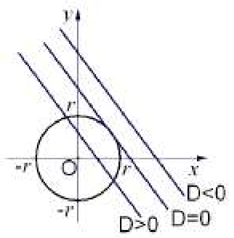
[그림 2]

김 교사 : ①아! 진영이는 제이코사인법칙을 발견했구나. 정말 대단하네!

공학 도구를 활용한 수업에서 나타날 수 있는 극단적인 교수 현상 중 ①에 해당하는 것을 제시하고, 제시한 현상의 의미를 위의 상황과 관련지어 설명하시오. (4점) [2008]

- ①에 해당하는 극단적인 교수 현상 :
- 현상의 의미 :

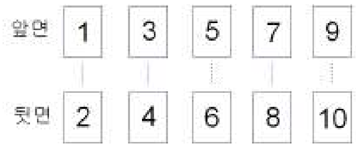
36. 경호가 배우는 10-나 단계의 교과서에
'원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식'을 구하는 과정이 다음과 같이 나와 있다.

> 원과 직선의 방정식을 각각
>
> $$x^2+y^2=r^2 \cdots\cdots ①$$
>
> $$y=mx+n \cdots\cdots ②$$
>
> 이라 하면, 이들 교점의 좌표는 이 두 방정식을 연립하여 풀었을 때의 해이다.
>
> ②를 ①에 대입하여 y를 소거하면
>
> $$x^2+(mx+n)^2=r^2$$
>
> 이 식을 정리하면
>
> $$(m^2+1)x^2+2mnx+n^2-r^2=0 \cdots\cdots ③$$
>
> 이 때, $m^2+1\neq 0$이므로 ③은 x에 대한 이차방정식이다. 따라서, ③의 판별식을 D라 하면 원 ①과 직선 ②사이에는 다음과 같은 관계가 있다.
>
> [1] $D>0 \Leftrightarrow$ 서로 다른 두 점에서 만난다.
>
> [2] $D=0 \Leftrightarrow$ 한 점에서 만난다.(접한다.)
>
> [3] $D<0 \Leftrightarrow$ 만나지 않는다.
>
> 
>
>
> 특히 [2]의 경우,
>
> $$\frac{D}{4}=m^2n^2-(m^2+1)(n^2-r^2)=0$$
>
> 이므로, 원과 직선이 접할 때 $n=\pm r\sqrt{m^2+1}$ 임을 알 수 있다. 결국 구하는 접선의 방정식은
>
> $$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1} \text{ 이다.}$$

피아제(J. Piaget)는 반영적 추상화의 메커니즘을 '반사와 반성'이라는 두 가지 성분으로 설명하였다.
경호가 위의 내용을 학습하는 과정에서 '반사와 반성'이 일어날 수 있는 상황을 찾아 한 가지만 제시하고, 그 상황이 '반사와 반성' 과정에 해당한다고 할 수 있는 이유를 설명하시오. (5점) [2008]

- '반사와 반성'이 일어나는 상황 :
- 이유 :

37. 다음은 박 교사가 학생들의 수학적 추론 능력을 알아보기 위해 제시한 문제이다.

> 카드의 앞면과 뒷면에 각각 1과 2, 3과 4, 5와 6, 7과 8, 9와 10이 적힌 다섯 장의 카드가 있다.
>
> 
>
>
> 다섯 장의 카드를 책상 위에 배열하였을 때, 보이는 다섯 개의 수 중 짝수가 2개인 경우 그 다섯 개의 수의 합이 얼마인지 구하시오.

이 문제에 대하여 철수가 다음과 같은 풀이를 제시하였다.

> 보이는 다섯 개의 수가 1, 4, 6, 7, 9일 경우, 2, 3, 5, 8, 9일 경우, 그리고 1, 3, 6, 7, 10일 경우를 살펴보면, 그 합이 모두 27이 됨을 알 수 있습니다. 다른 경우도 마찬가지 일 것이므로 답은 27일 것입니다.

철수가 제시한 풀이에 나타난 수학적 추론의 유형을 쓰고, 이러한 유형의 추론이 철수의 문제해결 과정에서 어떤 역할을 하였는지 설명하시오. 그리고 철수의 풀이에서 보완되어야 할 점을 기술하시오. [5점] [2008]

- 수학적 추론의 유형 :
- 역할 :
- 보완점 :

38. 수학교육의 발달 과정에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? (2점) [2009 모의평가]

① 심리학은 수학교육학에 연구 방법론을 제공해 주어 학문적 정체성 확보에 도움을 주었다.
② 20세기 초의 페리(J. Perry), 무어(E. Moore), 클라인(F. Klein)이 중심이 된 수학교육 운동에서는 논리적 엄밀성에 기반을 둔 수학교육을 강조하였다.
③ 수학 및 과학 기술의 급격한 진보에 따른 변화에 대응하고자 제2차 세계 대전 후 수학교육 개혁 운동이 일어났다.
④ 수학교육 현대화 운동의 결과로 나타난 학생들의 수학 학력 저하는 '기본으로 돌아가기 운동(Back-to-Basics Movement)'을 야기시켰다.
⑤ 폴리아(G. Polya)는 수학적 발견술 지도가 문제해결 교육의 핵심이라고 하였으며, 1980년대 이후 학교 수학에서는 문제해결을 강조하고 있다.

39. 2006년 8월에 수학과 국민 공통 기본 교육과정이 개정 고시되었다. 제7차 수학과 교육과정과 비교할 때, 다음 중 2006년 개정 수학과 교육과정에서 변화된 내용으로 옳지 않은 것은? (2점) [2009 모의평가]

① 수학과 교육과정에서 초등학교와 중·고등학교의 내용 영역의 구분이 다르게 설정되었다.
② 단계형 수준별 교육과정을 개정하여, 학생의 능력과 수준, 적성, 희망 등을 고려하여 학교 상황에 맞게 수준별 수업을 운영할 수 있게 하였다.
③ 학생의 미래 생활과 학습의 필요성을 고려하여 중학교 3학년의 교육 내용에 중앙값과 최빈값의 개념을 도입하였다.
④ 학생들의 수학적 능력 신장을 위하여 수학적 추론 및 문제해결력뿐만 아니라 수학적 의사소통 능력의 신장을 강조하였다.
⑤ 중학교 3학년 수학 수업 시수를 주당 4시간으로 늘려 보충·심화수업을 할 수 있게 하였다.

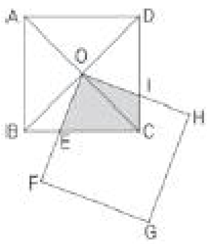
40. 문제와 문제해결 방법이 <보기>에 제시되어 있다. 각 방법 속에 나타난 전략을 올바르게 짝지은 것은? (1.5점) [2009 모의평가]

<보 기>

ㄱ. [문제] 방정식 $2x+1=7$을 풀어라.
(문제해결 방법) x에 1을 대입하여 등식이 성립하는지 살펴본 후 성립하지 않으면 버리고, 성립하는 값이 나올 때까지 다른 수를 시도해 본다.

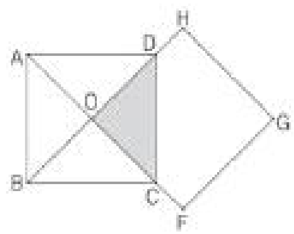
ㄴ. [문제] 방정식 $2^x-2^{3-x}=2$를 풀어라.
(문제해결 방법) 2^x을 y로 치환하여 y의 방정식으로 변형한 후, y의 값을 구하고 그 결과를 이용하여 x의 값을 구한다.

ㄷ. [문제] 한 변의 길이가 4㎝인 두 정사각형이 있다. [그림 1]과 같이 한 정사각형의 한 꼭짓점이 다른 정사각형이 대각선의 교점에 있을 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



[그림 1]

(문제해결 방법)
[그림 2]를 이용하여 [그림 1]의 색칠한 부분의 넓이를 구한다.

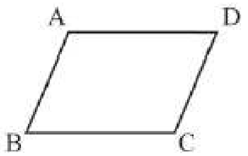


[그림 2]

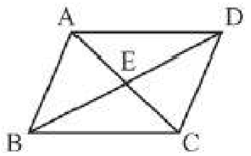
	ㄱ	ㄴ	ㄷ
①	예상과 확인	단순화 하기	특수화 하기
②	거꾸로 풀기	식 세우기	그림 그리기
③	예상과 확인	일반화 하기	단순화 하기
④	거꾸로 풀기	특수화 하기	단순화 하기
⑤	단순화 하기	거꾸로 풀기	그림 그리기

41. 김 교사는 ‘평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다’는 성질을 가르치고 있다. 스켐프(R. Skemp)가 제안한 ‘이해’의 유형 가운데 철수의 대답과 가장 관련이 깊은 것은? (1.5점) [2009 모의평가]

김 교사 : 여기에 평행사변형이 있습니다([그림 1]). 평행사변형의 두 대각선을 그렸을 때([그림 2]), 이 두 대각선을 어떤 성질이 있는지 이야기해 볼까요?



[그림 1]



[그림 2]

철　수 : 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분해요. 그러니까 선분 AE의 길이와 선분 EC의 길이가 같고, 선분 BE의 길이와 선분 ED의 길이가 같아요.

김 교사 : 아! 그렇군요. 그럼 어떻게 그렇다는 것을 알 수 있지요?

철　수 : 그림에서 보면 바로 똑같다는 것을 알 수 있어요. 초등학교 때 그렇게 배운 것으로 기억하고 있는데, 그 이유는 잘 모르겠어요.

① 도구적 이해　② 관계적 이해
③ 논리적 이해　④ 형식적 이해
⑤ 기호적 이해

42. 오수벨(D. Ausubel)의 ‘점진적 분화의 원리’를 사용한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009 모의평가]

<보 기>

ㄱ. 삼각형, 사각형, 오각형 등의 내각의 합을 구해 보게 한 후 n각형의 내각의 합이 $180° \times (n-2)$임을 지도하였다.

ㄴ. 함수 $f(x)$에서 변수 x와 $f(x)$의 관계로부터 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 합성함수 $g(f(x))$를 이해시켰다.

ㄷ. $a > 0, a \neq 1, M > +\log_a N$일 때, $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$이 성립한다는 것을 학습한 후에 이전에 학습한 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$을 재인식하도록 하였다.

ㄹ. 이항연산에서 역원의 개념을 지도한 후 복소수의 곱셈에 대한 역원을 지도하였다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ

43. 수학적 개념을 구성주의 관점으로 지도한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009 모의평가]

<보 기>

ㄱ. ‘공간에서 한 평면에 속하지 않은 두 직선은 꼬인 위치에 있다.’고 정의를 말해 주고, 그 정의에 대한 예를 보여주면서 꼬인 위치의 개념을 지도하였다.

ㄴ. 양팔저울을 가지고 무게를 비교하는 시험을 교사가 직접 실행해 보여주고, 양팔저울의 특성으로부터 등식의 성질을 유도하면서 일차방정식을 지도하였다.

ㄷ. 학생들에게 다양한 평행사변형을 그려서 공통된 성질을 찾아보게 한 후, 이 성질을 활용하여 평행사변형이 되는 조건을 써보게 하면서 평행사변형을 지도하였다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

44. 반 힐레(van Hieles)는 기하 학습의 수준을 제0수준~제4수준의 다섯 가지로 구분하였다. 경호의 응답 내용을 근거로 볼 때, 경호가 도달한 수준은?
(2점) [2009 모의평가]

> 김 교사 : (직사각형을 칠판에 제시하고 묻는다.) 이 도형은 무엇일까요?
> 경 호 : 직사각형이요.
> 김 교사 : 이 도형과 정사각형의 중요한 차이점은 무엇인가요?
> 경 호 : 직사각형은 네 각의 크기가 모두 같기만 하면 되지만, 정사각형은 네 각의 크기가 같아야 할 뿐만 아니라 네 변의 길이도 모두 같아야 합니다. 음… 그리고요, 정사각형은 항상 직사각형이 되지만 직사각형은 정사각형이 되지 않을 때도 있어요.

① 제0수준 - 시각적 인식 수준(recognition)
② 제1주순 - 기술적/분석적 인식 수준(analysis)
③ 제2수준 - 관계적/추상적 인식 수준(ordering)
④ 제3수준 - 형식적 연역 수준(deduction)
⑤ 제4수준 - 엄밀한 수학적 수준(rigor)

45. 차 교사는 확률변수의 평균에 대한 성질
$$E(kX)=kE(X)$$
의 증명을 다음과 같은 방법으로 지도하였다.

> 모둠 활동 자료로 학급 학생들의 키를 미터(m) 단위와 센티미터(㎝) 단위로 각각 기록한 두 개의 표를 만들었다. 모둠별로 이 두 개의 표를 모두 나누어 준 뒤 하나의 표를 선택하여 평균을 구하도록 하였다. 이어지는 학급 토론에서 모둠별로 구한 평균을 비교해 보니 165와 1.65로 나뉘었다.
>
> 다음은 학급 토론 내용이다.
>
> 차 교사 : 같은 자료를 가지고 평균을 구했는데 두 개의 다른 값이 나왔어요. 그럼 두 값 가운데 하나가 틀렸다고 주장해도 될까요?
> (학생들이 각자의 모둠에서 두 표를 비교한다.)
> 선 아 : 두 표에서 사용한 단위가 달라요. $1m=100$㎝이니까, 아마도 단위가 센티미터인 자료를 사용한 모둠에서는 평균이 165가 나온 것 같고, 미터 단위를 사용한 모둠에서는 1.65가 나온 것 같아요. 즉, 센티미터 단위로 정리한 자료가 미터 단위로 정리한 자료의 100배가 되니까 그 평균도 100배가 된 것 같아요.
> 차 교사 : 선아의 추측을 식으로 표현하면 $E(100X)=100E(X)$인데, 선아의 추측이 맞나요?
> 정 덕 : 네. 우리 반 학생 30명의 키를 $x_1, x_2, \cdots, x_{30}$이라고 하면 평균은
> $$\frac{100x_1+\cdots+100x_{30}}{30}=100\left(\frac{x_1+\cdots+x_{30}}{30}\right)$$
> 이 됩니다. 그러니까 $E(100X)=100E(X)$가 성립해요.
> 지 현 : 30개의 자료에 대해 성립한다고 해서 모든 경우에 성립한다고 할 수는 없어요.
> 차 교사 : 정덕이는 지현이의 주장이 타당하다고 생각해요?
> 정 덕 : 아니요. 30을 N으로 바꾸면
> $$\frac{100x_1+\cdots+100x_N}{N}=100\left(\frac{x_1+\cdots+x_N}{N}\right)$$
> 이니까 자료의 크기가 N인 경우로 일반화할 수 있어요.
> 차 교사 : 정덕이는 각 자료에 곱해지는 수가 100인 특수한 경우에 대해 증명을 했는데 100이 아닌 임의의 상수의 곱으로 일반화할 수 이을까요?
> 경 이 : 정덕이가 쓴 등식에서 100을 일반적인 상수 k로 바꾸어 쓰면 $E(kX)=kE(X)$가 성립할 것 같아요.

위의 지도 과정에서 드러난 차 교사의 증명 지도에 대한 수리철학적 관점으로 가장 알맞은 것을 <보기>에서 두 개만 고른 것은? (2점) [2009 모의평가]

<보 기>

ㄱ. 증명은 의미를 고려하지 않고 특별한 규칙에 따라 행해지는 일련의 기호 조작이다.
ㄴ. 증명은 수업 상황에서 제기된 수학적 추측에 대한 설명과 확신의 수단이다.
ㄷ. 증명은 제기된 추측을 반박하고 재구성하는 계속적인 발견의 과정이다.
ㄹ. 증명은 가정에서 결론에 도달하는 단계적 절차로서 종합적 방식이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

46. 교수·학습의 측면에서 계산기 활용의 장점을 언급한 두 명의 교사를 <보기>에서 옳게 고른 것은? (2점) [2009 모의평가]

<보 기>

ㄱ. 김 교사 : 사칙계산을 배우는 초기 단계에서 계산기를 이용하면 계산을 빨리 할 수 있으므로, 학생들에게 연산의 의미와 구조에 대한 지식을 깊이 있게 전달할 수 있어요.

ㄴ. 이 교사 : 학생들에게 '$16^{-\frac{1}{2}}=(\ )$'를 지필 또는 계산기를 이용하여 풀게 했는데 약 99%의 학생이 계산기를 이용하여 풀고 난 후 0.25라고 답했습니다. 학생들이 소수를 사용하는 것에 더 익숙하므로, 앞으로는 수업 시간에 분수보다 소수를 주로 사용하는 것이 좋겠습니다.

ㄷ. 최 교사 : 함수 $y=ax+b(\neq 0)$의 그래프를 그릴 수 있는 학생들이 그래픽 계산기를 사용하여 a와 b의 값이 변하는 것에 따라 그래프의 모양을 관찰하면 그래프의 성질을 발견하는 데 도움이 됩니다.

ㄹ. 박 교사 : $\sqrt{2}$가 순환하지 않는 무산소수임을 탐구하는 과정에서

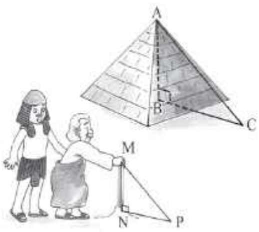
$$1=1^2<2<2^2=4,$$
$$1.96=1.4^2<2<1.5^2=2.25,$$
$$1.9881=1.41^2<2<1.42^2=2.0164$$

등의 계산을 계산기가 도와주므로 편리하지요.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

[47~48] 다음은 닮음의 응용과 관련된 수업 상황이다. 물음에 답하시오.

김 교사 : 탈레스는 맑은 날 지면에 막대기를 수직으로 세우고 막대기의 길이, 막대기 그림자의 길이, 피라미드 그림자의 길이를 동시에 측정한 뒤, 닮은 삼각형의 성질을 이용하여 피라미드의 높이를 계산했다고 합니다. 탈레스는 위의 세 값을 가지고 어떻게 피라미드의 높이를 구했을까요?



우선, 높이는 지면과 수직이니까 $\angle ABC=\angle MNP=90°$이고 같은 시간대에 측정했으니까 $\angle ABC=\angle MNP$이에요. 따라서 $\triangle ABC$와 $\triangle MNP$는 닮음이에요. 닮은 도형에서는 대응변의 길이 사이의 비가 같으니까, $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{MN}:\overline{NP}$이지요? 이 비례식을 풀면, 피라미드의 높이는 $\overline{AB}=\dfrac{\overline{BC}\times\overline{MN}}{\overline{NP}}$ 입니다.

소 현 : 만일 피라미드 그림자 BC의 길이는 오후 2시에 측정하고 막대기 그림자 NP의 길이는 오후 5시에 측정해도 피라미드의 높이 $\overline{AB}$에 대한 위의 식이 성립하나요?

김 교사 : (가)

47. 교사의 중요한 역할 중 하나는 학생들의 인지발달과 경험을 고려하여 창의적으로 사고할 수 있도록 지도하는 것이다. 이 사실을 고려할 때, 다음 중 (가)에 들어갈 김 교사의 말로 가장 적절한 것은? (2점) [2009 모의평가]

① 두 그림자의 길이를 재는 시각이 달라도 $\triangle ABC$와는 닮은 도형이므로 피라미드의 높이를 구하는 식은 항상 위와 같이 성립해요.

② 두 그림자의 길이를 재는 시각이 다르면 가 $\overline{MN} : \overline{NP}$와 같지 않으므로 피라미드의 높이를 구할 수 없어요.

③ 낮 동안 그림자의 길이는 그렇게 많이 변하지 않으니까 측정 시각은 피라미드의 높이 계산에 영향을 주지 않아요.

④ 태양의 고도가 다른 상황인 2시의 $\triangle ABC$와 5시의 $\triangle MNP$를 비교하면서 두 삼각형 사이의 유사점과 차이점을 찾아보세요.

⑤ 태양의 교도가 다른 상황인 2시의 $\overline{AB} : \overline{MN}$과 5시의 $\overline{AB} : \overline{MN}$을 비교하면서 생각해 보세요.

48. 다음 중 위의 수업 상황에 드러난 수학의 특성 가운데 가장 거리가 먼 것은? (2점) [2009 모의평가]

① 계통성 ② 실용성 ③ 일반성
④ 이상성 ⑤ 논리성

49. 중학교 2학년의 '삼각형의 성질' 단원에 있는 '삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.'라는 명제를 증명하려고 한다. 2006년 개정 수학과 교육과정에 비추어 볼 때, 학생이 알아야 하는 선수지식과 관련이 있는 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009 모의평가]

<보 기>

ㄱ. 삼각형에서 두 변과 그 끼인각이 같으면 그 삼각형은 합동이다.
ㄴ. 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다.
ㄷ. 직각삼각형에서 직각을 끼고 있는 두 변의 길이를 각각 a, b라 하고 빗변의 길이를 c라 할 때, $a^2+b^2=c^2$이다.

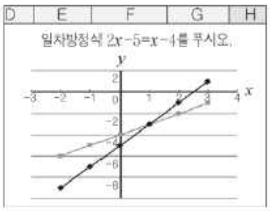
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ,ㄷ

50. ‘변수’는 ‘변화하는 대상(variable object)', '다가이름(polybalent name)', ‘자리지기(placeholder)' 등과 같이 다양한 수학적 의미를 가지고 있다. 일차방정식 $3x-r=x-4$의 풀이에 대한 다음 수업에 반영된 변수 개념에 관한 설명으로 가장 적절한 것은?
(2.5점) [2009 모의평가]

> 스프레드시트를 이용하여 일련의 x값에 대해 두 일차식 $2x-5$와 $x-4$의 값을 계산하여 두 식의 값이 같아지는 x값을 찾도록 한다.
> ([그림 1])
> [그림 1]의 표의 값을 그래프로 나타내어 두 식의 값이 같아지는 x값 근처에서 그래프가 서로에게 접근해가는 것을 시각적으로 확인할 수 있도록 한다. ([그림 2])

	A	B	C	D
1	일차방정식 2x−5=x−4를 푸시오.			
2	x	$2x-5$	$x-4$	
3	−2	−9	−6	
4	−1	−7	−5	
5	0	−5	−4	
6	1	−3	−3	
7	2	−1	−2	
8	3	1	−1	
9	4	3	30	
10				

[그림 1]



[그림 2]

① 미지수와 동일한 개념이다.
② 변화 관계를 표현하는 동적 개념이다.
③ 이항(移項)을 이용한 일차방정식 풀이에 사용된 변수와 동일한 개념이다.
④ 근의 공식을 이용한 이차방정식 풀이에 사용된 변수와 동일한 개념이다.
⑤ 명제 ‘평면 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{AB}+\overline{BC} \geq \overline{AC}$이다’ 에 사용된 변수 A, B, C와 동일한 개념이다.

51. 다음은 ‘평균’에 대한 이해 및 문제해결 능력을 평가하기 위한 문항과 채점기준이다. 이 기준에 따라 채점할 때, 아래에 제시된 답안의 평가 결과로 가장 적절한 것은? (2.5점) [2009 모의평가]

<문 항>

> 어떤 네 수의 평균이 17이다. 그 네 수 가운데 세 수는 15, 18, 16이다. 나머지 한 수는 얼마인가? 풀이 과정을 모두 제시하고 구한 값이 답이 되는 이유를 설명하시오.

등급	채 점 기 준
A	• 평균의 의미를 이해하고 있다. • 사용한 전략이 적절하며 정확하게 사용되었다. • 옳은 답을 제시하였다.
B	• 평균의 의미를 이해하고 있다. • 사용한 전략은 적절하지만 전략 사용에서 사소한 실수나 생략이 나타났다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
C	• 평균의 의미를 부분적으로 이해하고 있다. • 전략의 사용이 부분적으로 불완전하거나 부정확하다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
D	• 평균의 의미에 대한 이해가 초보적이다. (예 : 자료의 합만 구한 경우). • 문제해결 고정에 분명히 드러난 전략이 없다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.
E	• 평균의 의미를 전혀 파악하지 못했다. • 의미 없는 계산이 제시되어 있고, 설명이 제시되지 않았거나 설명이 단순히 문제를 재진술하고 있다. • 답은 옳을 수도 있고 틀릴 수도 있다.

<답 안>

> 먼저 알고있는 세수를 다 더한 뒤
> 네번째 수를 찾기 위해
> 여러가지 수를 더해서 평균을 구해봤다.
>
> $15+16+18=49$
>
> $49+17=56$ $\qquad 56 \div 4 = 14$
>
> $49+20=69$ $\qquad 69 \div 4 = 17 \cdots 1$
>
> 답은 20 이다.

① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

52. 2007년 개정 수학과 교육과정의 내용에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (2점) [2009]

① 고등학교 1학년의 학습 내용이었던 ‘두 원의 위치 관계’를 중학교 1학년으로 이동하였다.
② 중학교 3학년에 있던 ‘무리수의 도입은 무한소수를 소재로 한다.’라는 학습 지도상의 유의점을 삭제하였다.
③ 고등학교 1학년의 수와 연산 영역에 ‘조건’, ‘진리집합’, ‘모든’, ‘어떤’이라는 용어를 도입하였다.
④ 「적분과 통계」과목에 ‘중복조합’ 및 ‘표본비율과 모비율의 관계’에 대한 내용을 도입하였다.
⑤ 「기하와 벡터」과목에 ‘일차변환과 행렬’ 및 ‘복소수의 극형식’에 대한 내용을 도입하였다.

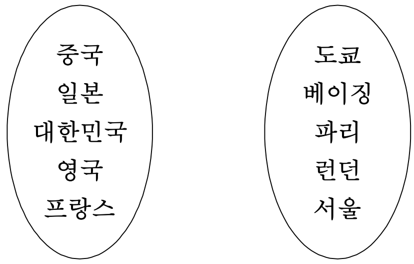
53. 다음은 학교수학에 관한 두 가지 입장을 나타낸 것이다. 이에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? (2점) [2009]

(가) 학생들이 수학을 통하여 현상을 이해하는 안목을 기를 수 있게 하기 위해서는 학생들에게 수학의 구조를 가르쳐야 한다. 이 때, 수학의 구조를 가르친다는 것은 학생들이 수학자와 본질적으로 동일한 일을 하게 하는 것으로, 어떤 수준의 학생에게도 그 본질은 적절한 형태로 제공될 수 있다.
(나) 수학의 구조를 가르친다는 명분으로 완성된 형식적 수학을 구체적으로 번역하여 학생들에게 제공하려는 하향식 구성은 반교수학적인 전도이며, 학생들 스스로 발전적인 조작의 가능성을 갖지 못하는 지식을 제공하는데 그칠 우려가 있다.

① ‘새 수학(New Math)' 운동은 (가)와 같은 관점에서 출발하였다.
② (가)에서 어떤 수준의 학생에게도 수학자가 하는 일과 본질적으로 같은 것을 제공할 수 있다는 생각은 브루너(J. Bruner)의 EIS 이론으로 뒷받침된다.
③ (가)의 입장을 따른다면 수학사의 대역적인 학습 과정을 단축된 형태로 재현하는 방식의 지도가 바람직하다.
④ (나)의 입장에서 (가)에 대한 대안은 현상을 정리, 조직하는 수단으로서 수학을 학습하게 해야 한다는 것이다.
⑤ (나)의 입장을 따른다면 알고리즘, 사고패턴 및 문제 해결 전략 등의 수학적 사고를 재발명에 의해 학습하는 것이 바람직하다.

54. 다음은 함수 개념을 도입할 때 사용할 수 있는 예이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009]

(가) 매분 2㎞의 속력으로 직선 운동 하는 기차가 P지점을 지난 지 x분 후에 P지점으로부터 y㎞ 떨어진 지점을 지난다. x, y 사이의 관계를 표로 나타내어라.
(나) 넓이가 12㎠인 직사각형의 가로의 길이가 x㎝이면 세로의 길이는 y㎝이다. x, y 사이의 관계를 식으로 나타내어라.
(다) 다음 그림에서 각 나라와 그 나라의 수도를 연결하여라.



<보 기>

ㄱ. 역사 발생적 원리에 따라 함수 개념을 지도한다면 (가)와 (나)로부터 출발하여 (다)로 나아가는 것이 바람직하다.
ㄴ. 집합론을 토대로 한 현대 수학에서는 함수 개념을 (가)와 (나)가 아니라 (다)와 같은 맥락으로 설명한다.
ㄷ. 2007년 개정 수학과 교육과정에서는 비례 관계를 초등학교에서 지도하게 하고, 중학교에서는 (다)와 같은 맥락만으로 함수 개념을 도입하게 하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

55. 다음은 대수 학습에서 어려움을 겪고 있는 중학생의 사례이다. 이에 대한 설명으로 적절한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009]

> (가영) $a=3, b=4$일 때 $2ab$의 값을 234라고 썼다.
> (나현) $S=\{1, 2, 3\}$일 때 집합 $\{a+b \mid a, b \in S\}$를 $\{3, 4, 5\}$라고 썼다.
> (다은) a는 양수이고 $-a$는 음수라고 생각한다.

<보 기>

ㄱ. 스켐프(R. Skemp)에 따르면 가영이는 수와 연산에 대한 스키마를 가지고 있지 않다.
ㄴ. 나현이의 오류는 a와 b가 서로 다른 수를 나타낸다고 생각하는 문자에 대한 잘못된 이해로 해석될 수 있다.
ㄷ. 다은이는 문자가 나타내는 대상을 제한된 범위에서만 생각하는 것으로 볼 수 있다.
ㄹ. 갈등상황을 제공하는 것은 나현이와 다은이가 산술적 사고에서 대수적 사고로 이행하는데 방해가 된다.

① ㄱ, ㄹ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

56. 박 교사는 확률과 통계 단원에서 조합의 개념을 도입하는 수업을 한 후 다음과 같이 수업 일지를 썼다.

도입	5명씩 이루어진 각 모둠에서 2명을 대표로 뽑는 방법이 몇 가지인지 모둠별로 알아보라고 하였는데, A모둠에서는 가위바위보를 하자, 제비뽑기를 하자는 등 의견이 분분하였고, B모둠에서는 각 경우를 수형도로 나타낼 것인지, 표로 나타낼 것인지 결정하느라 많은 시간을 소비하였다.
전개	도입에서 너무나 많은 시간을 소비하여 ${}_nC_r$의 정의를 곧바로 제시한 후 ……. (이하 생략)

도입부에 나타나는 교수학적 현상과 관련된 설명으로 적절하지 않은 것은? (2점) [2009]

① 이러한 현상은 수학적 지식의 개인과, 배경화 과정을 간과함으로써 일어난다.
② 이와 같은 현상을 메타-인지적 이동(meta-cognitive shift)이라고 부른다.
③ 문제해결 지도에서 발견술 자체가 지도 목적이 되는 것도 유사한 현상으로 이해할 수 있다.
④ 학생들의 활동을 강조하는 수업에서는 활동의 규약을 많이 만들수록 이와 같은 문제가 발생하기 쉽다.
⑤ 도입부와 같은 활동 없이 곧바로 전개 부분부터 수업이 시작 된다면 형식적 고착이 일어날 가능성이 높다.

57. 다음은 수학에서 정의를 확장하거나 정리를 일반화할 때 고려되는 어떤 원리를 설명한 것이다.

> 기존의 수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계를 확장하고 연산과 관계를 확장하듯이, 어떤 대수적 또는 기하적 구조를 확장할 때에는 기존의 체계가 가지고 있는 기본적인 성질이 유지되도록 하면서 그 구조를 확장해야 한다.

학교수학에서 설명되는 다음 사례 중 위의 원리와 가장 거리가 먼 것은? (2.5점) [2009]

① 중학교에서 한 점으로부터 같은 거리에 있는 점들로 정의되었던 원이 고등학교에서는 좌표평면 위에서 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 정의 된다.
② 중학교에서 $a^n=a\times a\times\cdots\times a$로 자연수 n에 대해서만 정의되었던 지수가 고등학교에서는 지수법칙 $a^{m+n}=a^m a^n$에 의해 정수 지수도 정의된다.
③ 중학교에서 직각삼각형의 변의 길이의 비로 정의되었던 삼각비가 고등학교에서는 좌표를 이용하여 둔각이나 음의 각에 대해서도 정의되는 삼각함수로 설명된다.
④ 음수 -2와 -3이 각각 $(-2)+2=0$과 $(-3)+3=0$을 뜻하는 자연수의 덧셈에 대한 역원으로 정의되면, 교환법칙과 결합법칙에 의해 $(-2)+(-3)$은 $-(2+3)$을 의미하도록 정의하는 것이 자연스럽다.
⑤ 음수가 도입되기 전에는 $x+y=3$의 그래프를 1사분면의 선분으로만 그릴 수 있지만, 음수가 도입되고 나면 그 그래프를 자연스럽게 직선으로 그릴 수 있다.

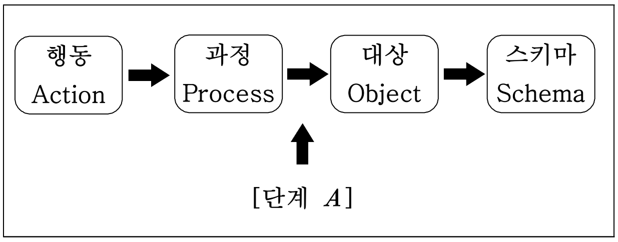
58. 연결주의(connectionism)에 입각한 손다이크(E. L. Thorndike)의 관점에서 수학 학습-지도를 설명한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009]

<보 기>

ㄱ. 계산이 부정확하다는 것은 관련 본드(bond)가 약하다는 것을 의미한다.
ㄴ. 계산의 기초적인 학습은 연역적인 설명보다는 귀납적인 확인을 통해 이루어지는 것이 효과적이다.
ㄷ. 추론적 사고는 연습의 법칙으로 설명될 수 없으므로 훈련을 통하여 얻을 수 없다.
ㄹ. 수 개념은 양의 측정 활동을 통해 구성되므로 사칙연산도 지속적으로 측정 활동과 관련지어 다루는 것이 바람직하다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

59. 어떤 수학적 개념이 구성되기 위해서는 그림과 같이 구체적인 ‘행동’이 정신적인 ‘과정’이 되고, 그 ‘과정’이 하나의 ‘대상’으로 인식된 후 구조화되어 ‘스키마’가 되는 단계를 거치게 된다.



다음 사례 중 그림에서 지시하는 [단계 A]와 가장 거리가 먼 것은? (2점) [2009]

① 자연수를 끝없이 셀 수 있다는 가능적 무한(potential infinity)의 개념에서 완결된 무한, 즉 현실적 무한(actual infinity)을 인식하는 데 이르게 되었다.
② 점화식 $a_{n+1}=2a_n+1$로 정의된 수열의 첫 번째 항이 1로 주어진 것으로부터 그 다음의 3개 항이 $3, 7, 15$임을 알게 되었다.
③ 삼각형과 삼각형이 아닌 것을 구별하던 아동이 삼각형의 성질에 관심을 가지게 되었다.
④ ‘$2+3=5$’를 ‘2와 3을 더한 결과가 5’라고 생각하는 것을 넘어서 ‘$2+3$’과 ‘5’가 동등한 의미를 가지는 것으로 생각하게 되었다.
⑤ 실수의 집합에서 두 실수를 대응시키는 함수를 다루다가 함수를 원소로 하는 새로운 집합을 생각하게 되었다.

60. 다음은 문제해결에 어려움을 겪는 학생들의 이야기이다. 이에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? (2점) [2009]

> (가) 나는 개념과 원리를 제대로 이해하고 있는 것 같은데, 막상 문제를 풀 때는 아무 생각이 안 나고 내가 아는 어떤 내용을 적용해야 할 지 모르겠어.
> (나) 나는 문제를 풀 때, 전에 풀었던 비슷한 문제가 생각나지 않으면 어떻게 그 문제에 접근해야 할 지 모르겠어.
> (다) 나는 3분가량 지나도 문제가 풀리지 않으면 그 문제를 포기하게 돼.
> (라) 나는 수업 시간에 풀어 보았던 문제인데도 약간만 수가 변형되어 나오면 못 풀겠다니까.
> (마) 나는 계산하는 데 시간이 너무 많이 걸려서 문제를 끝까지 못 푸는 경우가 많다는 게 문제야.

① 숀펠드(A. H. Schoenfeld)에 따르면 (가)와 같은 학생은 문제 해결과 관련된 요인 중 '통제력(control)'이 부족하다고 할 수 있다.
② (나)와 같은 학생은 문제해결에 필요한 알고리즘이나 법칙에 대한 지식이 부족하다.
③ (다)의 사례는 수학이나 문제해결에 대한 가치관이나 선입견이 문제해결에 영향을 미친다는 것을 보여 준다.
④ (라)와 같은 학생에게는 문제 제기(problem posing) 활동이 유용할 수 있다.
⑤ (마)와 같은 학생에게 문제해결의 경험을 제공하기 위해서 계산기를 보조 수단으로 활용할 수 있다.

61. 다음 수업 상황에 포함되어 있는 사고 방법을 <보기>에서 모두 고른 것은? (1.5점) [2009]

> 교 사 : 오늘은 수학자들이 오랫동안 도전하고 있는 문제를 소개하려 합니다. 다음을 보고, 추측할 수 있는 사실을 말해 봅시다.
>
> | | | | |
> |---|---|---|---|
> | $6=3+3$ | $8=3+5$ | $10=3+7$ | $20=3+17$ |
> | $36=5+31$ | $48=11+37$ | $66=19+47$ | $72=31+41$ |
>
> 학생 A : 좌변에 있는 수는 모두 짝수입니다.
> 교 사 : 좋아요. 그럼 우변에 있는 수들은요?
> 학생 B : 짝수는 모두 홀수 두 개의 합으로 나타낼 수 있다는 건가요?
> 학생 C : 그건 너무 당연하지 않아요? 그 정도가 아닌 것 같은데요.
> 학생 A : 아하, 우변에 있는 수들은 모두 소수이군요!
> 학생 B : 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다는 겁니까?
> 학생 A : 그런데 2의 경우는 짝수이지만 두 소수의 합으로 나타낼 수는 없어요.
> 학생 C : 그렇다면 2보다 큰 짝수는 모두 두 소수의 합으로 나타낼 수 있다……?
> 교 사 : 그래요. 학생 C가 말한 것을 '골드바흐(Goldbach)의 추측'이라고 하는데, 아직까지 아무도 증명하지는 못했어요.

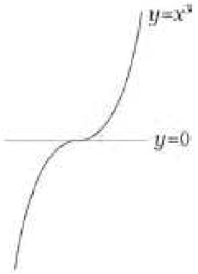
<보 기>

ㄱ. 유비 추론　ㄴ. 귀납 추론　ㄷ. 분석법
ㄹ. 일반화　ㅁ. 반례 들기

① ㄱ, ㄴ, ㄷ　② ㄱ, ㄴ, ㅁ　③ ㄴ, ㄷ, ㄹ
④ ㄴ, ㄹ, ㅁ　⑤ ㄷ, ㄹ, ㅁ

62. 다음은 수학 학습 과정에서 학생들이 갖는 오개념의 사례이다.

- 아무 것도 없는 것을 5명에게 나누어준다는 것은 불가능하므로 0/5는 불능이다.
- 순환소수 $0.999\cdots$는 1이 아니라 1에 한없이 가까워지는 수이다.
- 곡선의 접선은 그 곡선을 스치고 지나가야 하므로 다음 그림의 직선은 접선이 아니다.



위와 같은 유형의 오개념과 관련한 설명으로 적절한 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2009]

<보 기>

ㄱ. 일상적인 언어, 과도한 일반화, 은유 등의 영향으로 이러한 오개념이 발생한다.
ㄴ. 이러한 오개념을 극복하는 학습으로부터 형성된 신념을 바탕으로 학생들은 이차 직관을 형성한다.
ㄷ. 이러한 오개념을 극복하기 위해서는 구체적인 활동을 통해 직관적으로 지도하는 교수학적 노력이 필요하다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

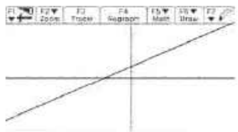
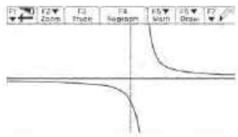
63. 다음 수업 상황에 관한 설명으로 가장 적절한 것은? (2.5점) [2009]

교 사 : 이번 시간에는 유리함수 $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프를 그려 보겠습니다. 먼저 이 그래프의 특징에 대해 알 수 있는 것을 자유롭게 이야기해 봅시다.

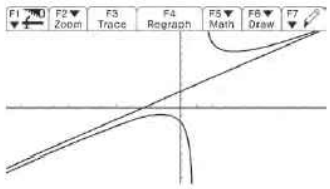
학생 A : $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로 이 그래프는 직선 $y=x+2$와 쌍곡선 $y=\dfrac{4}{x-1}$를 각각 그린 후 y값을 더해서 그릴 수 있지 않을까요?

학생 B : $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}=x+2+\dfrac{4}{x-1}$이므로 이 그래프는 $x\to\pm\infty$일 때 직선 $y=x+2$와 비슷해질 것 같습니다.

교 사 : 그러면 그래프 계산기로 직선 $y=x+2$와 쌍곡선 $y=\dfrac{4}{x-1}$를 각각 그린 후 두 함수를 더해 보면서 여러분이 생각했던 것을 확인해 봅시다.

$y=x+2$의 그래프 $y=\dfrac{4}{x-1}$의 그래프



$y=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$의 그래프

교 사 : 다음 시간에는 도함수를 이용하여 이 그래프의 개형을 그려 보겠습니다.

① 한 점의 근방에서 그래프의 변화를 관찰하는 국소적 접근과 함수의 정의역 전체에서 그래프를 해석하는 전체적 접근을 통합하여 함수의 그래프를 지도하고 있다.
② 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 번역 활동을 통하여 이와 유사한 문제의 해결에서 유리함수의 개념을 유연하게 활용할 수 있도록 지도하고 있다.
③ 그래프 계산기를 사용하여 직선, 쌍곡선을 비롯한 여러 가지 그래프를 구체적으로 그려보고 있으므로 이 수업은 '수학적 다양성의 원리'를 적용한 것이다.
④ 대수식의 시각화를 통하여 유리함수와 관련된 추측이 참임을 확인하는 경험적 정당화 활동을 하고 있다.
⑤ 그래프 표현과 대수식 표현 사이의 연계성을 통하여 학생들에게 대수식 조작의 의미를 반성하도록 하고 있다.

64. 다음은 김교사가 삼각함수 단원을 수업한 수 수행평가를 위하여 만든 과제이다. 이 과제로 평가할 수 있는 항목으로 가장 거리가 먼 것은? (1.5점) [2009]

> 1. 우리 도시의 지난 2년간 월평균 온도를 조사하시오.
> 2. x축을 월, y축을 월평균 온도($°C$)로 하고, 이 자료를 순서쌍 (x, y)로 하여 좌표평면 위에 나타내시오.
> 3. 이 점들이 나타낼 수 있는 적당한 삼각함수를 찾는 과정을 자세히 기록하시오.
> 4. 내년 우리 도시의 월별 온도를 예측하시오.

① 주기함수에 대한 이해를 바탕으로 하여 과제를 논리적으로 해결하는 과정을 평가 할 수 있다.
② 자연현상을 수학적 모델링을 통하여 이해하고 분석하는 능력을 평가할 수 있다.
③ 문제 해결에 필요한 식, 그래프, 기호의 정확한 사용 능력을 평가할 수 있다.
④ 주어진 문제 상황에 수학적 개념과 원리를 적용하는 능력을 평가할 수 있다.
⑤ 수학의 유용성과 수학적 활동이 가치에 대한 신념을 평가할 수 있다.

65. 다음 교사들의 외도에 적합한 평가 방법이 가장 알맞게 연결 된 것은? (2점) [2009]

> (가) 학생들이 미분과 적분 단원을 학습하는 동안 수학적 이해가 발달하는 과정을 전체적으로 평가하고 싶습니다. 또, 학생 스스로의 반성적인 자기 평가도 이루어지면 더 좋겠습니다.
> (나) 수학 공부를 아주 열심히 하는데 성적은 항상 낮은 학생이 있습니다. 이 학생의 메타-인지적인 능력을 평가 할 필요가 있다고 생각합니다.
> (다) 스스로 문제를 찾고, 이를 해결하기 위해 자신의 추론 능력이나 알고리즘을 사용하는 능력, 자신의 아이디어를 다른 사람에게 전달하는 능력을 평가하고 싶습니다.

	(가)	(나)	(다)
①	관찰과 면담	수학저널 쓰기	포트폴리오
②	포트폴리오	관찰과 면담	프로젝트
③	포트폴리오	프로젝트	수학저널 쓰기
④	프로젝트	관찰과 면담	포트폴리오
⑤	수학저널 쓰기	포트폴리오	프로젝트

66. 2007년 개정 수학교육과정에서 기하 영역과 관련된 교육 내용 및 교수·학습 상의 유의점으로 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은? (1.5점) [2010]

> <보 기>
> ㄱ. 중학교 1학년에서 점, 선, 면, 각, 원에 대한 성질은 직관적으로 탐구한다.
> ㄴ. 중학교 2학년에서 삼각형과 사각형의 성질은 증명 없이 직관적으로 이해하는 정도로 다룬다.
> ㄷ. 중학교 3학년에서 피타고라스 정리의 역은 증명 없이 문제 상황을 통해 간단히 다룬다.
> ㄹ. 고등학교의 '기하와 벡터'에서 공간도형의 성질은 관찰과 직관에 의해 이해한 후 증명을 하도록 한다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ, ㄷ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ ⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

67. 다음의 학습 원리를 명시적으로 제시한 수학교육자에 대한 설명 중 적절하지 않은 것은? (2점) [2010]

> • 활동적(능동적) 학습의 원리 : 학습자는 주어진 상황에서 배워야 할 내용을 스스로 발견해야 한다.
> • 최선의 동기유발의 원리 : 학습자는 배울 내용에 대해서 흥미를 가져야 하며 학습 활동에서 즐거움을 찾을 수 있어야 한다.
> • 비약 없는 단계의 원리 : 효과적인 학습은 탐구단계를 지나 언어화와 개념 형성 단계로 나아가야 하며 학습자의 정신적 태도의 통합과 형성에 기여해야 한다.

① 수학교육을 통한 인성교육에도 관심을 기울였다.
② 데카르트의 사고 규칙을 참조하여 자신의 이론을 체계화하려 하였다.
③ 교사는 소크라테스 대화법의 산파로서의 역할을 해야 한다고 하였다.
④ 귀납보다는 전형적인 예에 의한 예제적 접근을 대표적인 개념 학습 방식으로 제시하였다.
⑤ 새수학(Nw Math) 운동에 반대하며 대안으로 수학 지도에 있어서 역사 발생적 방법에 주목할 것을 주장하였다.

68. 라카토스(I. Lakatos)의 수리철학에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (2점) [2010]

<보 기>

ㄱ. 수학은 증명과 반박을 통해 확증된다.
ㄴ. 증명 분석은 이론적 개념을 생성하는 도구이다.
ㄷ. 연역적 추측은 수학적 발견의 수단이 될 수 있다.
ㄹ. 수학적 발견에 있어서 직관과 귀납의 역할을 강조하였다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄴ, ㄹ
④ ㄱ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄴ, ㄷ, ㄹ

69. 다음은 학생의 수학 학습에 대한 정의적 태도 평가를 위한 교사용 관찰 점검표이다. <보기>에서 적절한 설명을 모두 고른 것은? (2점) [2010]

정의적 태도 관찰 점검표

학생 이름 : ______

항목	세부 관찰 항목	매우 그렇다	그렇다	보통이다	그렇지 않다	매우 그렇지 않다
수학에 대한 흥미와 호기심	수학 시간에 즐거워한다.					
	수학적 개념이나 원리를 알려고 한다.					
수학에 대한 자신감	어려운 수학 문제를 잘 풀 수 있다고 생각한다.					
과제집착력과 의지	주어진 문제를 끝까지 해결한다.					
	모르는 점은 교사와 친구에게 질문하여 알려고 한다.					

<보 기>

ㄱ. 위의 관찰 점검표는 교사가 평가를 위해 관찰해야 할 학생의 행동 목록을 제공하므로 기록한 자료의 분석을 수월하게 한다.
ㄴ. '발견술에 대한 지식을 많이 가지고 있다'는 정의적 태도 평가를 위한 세부 관찰 항목으로 적합하다.
ㄷ. 위의 관찰 점검표는 학생이 자신의 수학적 태도를 스스로 자기 평가하는 데에도 활용될 수 있다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

70. $<A>$와 $<B>$에 대한 설명으로 적합하지 않은 것은? (2.5점) [2010]

$<A>$

실수 전체의 집합을 $\mathbb{R}$라 하고, $E \subset \mathbb{R}$일 때, 함수 $f: E \to \mathbb{R}$, $a \in E$라 하자. 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해서 적당한 $\delta(\varepsilon) > 0$가 존재하여 $|x-a| < \delta$인 모든 $x \in E$에 대해서 $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$이면, f는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

$<B>$

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여
(i) 함숫값 $f(a)$가 정의되고,
(ii) 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재하며,
(iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$를 만족할 때,
함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

① $<A>$는 해석학의 산술화 결과로 만들어진 함수의 연속성에 대한 정의이다.
② $<B>$는 $<A>$를 학생의 사고와 실제적 상황을 고려하여 탈개인화(depersonalizantion) 및 탈배경화(decontextualization)한 결과이다.
③ $<A>$를 $<B>$로 변환하는 과정에서는 교사, 학생, 지식 사이의 삼원적 관계 속에서 교수 상황을 고려해야 한다.
④ $<B>$는 x의 값이 변화함에 따라 $f(x)$의 값이 변화해 가는 과정에 초점을 맞춘다.
⑤ $<A>$는 한 점 근방에서 근접성을 보존한다는 아이디어를 개념화한 것이다.

71. 김 교사는 <A>에 대한 토론 활동 후 <B>를 지도하는 수업 계획을 세웠다. 김 교사의 수업 계획과 관련된 의견 중 수학화 교수·학습 이론의 관점에서 적절한 것은? (2점) [2010]

<A >

- 오늘 최저 기온은 $-5°C$이고 최고 기온은 $6°C$였다. 오늘 기온이 $0°C$인 순간이 있었을까?
- 오늘 보니 우리 딸의 키가 나보다 크다. 나와 우리 딸의 키가 같은 순간이 있었을까?

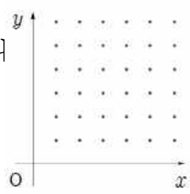
<B >

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$(단, $a<c<b$)인 c가 적어도 하나 존재한다.

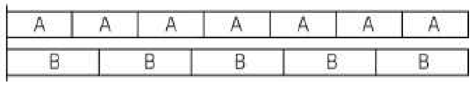
① <A>에 대한 토론 활동에 교사가 개입하는 것은 적절하지 못하다.
② 본질로 정리되어야 할 현상이 <A>에서 먼저 제공되어 반교수학적 전도가 일어날 가능성이 있다.
③ 귀납에 의한 개념 획득을 강조해야 하므로 <A>에 가능한 많은 예를 제시하는 것이 중요하다.
④ <B>가 <A>에서 주어진 현상을 정리한 수단이므로 <B>가 먼저 제시되어야 한다.
⑤ <B>는 더 높은 수준에서는 정리되어야 할 현상으로 다루어 질 수 있다.

72. 학생들이 다음 문제를 풀 때 겪을 수 있는 장애에 대한 설명 중 적절한 것은? (2점) [2010]

<문제1> 원점과 1사분면을 지나는 모든 직선은 적어도 하나의 격자점(x좌표와 y좌표가 양의 정수인 점)을 지나는가? (예, 아니요)



<문제2> 길이가 다른 두 종류의 막대 A와 B가 있다고 하자. 동일 출발선에서 막대를 계속 이어 붙여 막대 A를 늘어놓은 전체 길이와 막대 B를 늘어놓은 전체 길이가 같게 되도록 하는 것이 항상 가능한가? (예, 아니오)

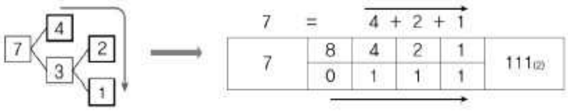


① 유리수에 대한 유추적 모델을 가지고 있는 경우에는 발생하지 않는다.
② 유리수의 조밀성을 이해하면 극복할 수 있는 장애이다.
③ 정수에 대한 스키마를 유리수에 대한 스키마로 재구성하면 극복된다.
④ 직선을 직접 그어보거나, 막대를 계속 이어 붙여 보는 활동을 통해 극복된다.
⑤ 이런 장애는 직관이 수학적 사고를 방해할 수 있음을 보여주는 예이다.

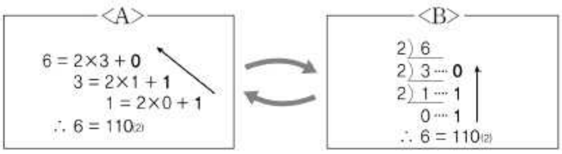
[73~74] 다음은 주어진 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 지도하기 위한 김 교사의 수업 계획과 수업을 한 후 어느 학생을 평가한 내용이다. 이를 보고 물음에 답하시오.

[가] 수업 계획

<1단계> 주어진 수를 $8, 4, 2, 1$의 합으로 나타내고, 이를 이진법으로 나타내는 활동을 한다.



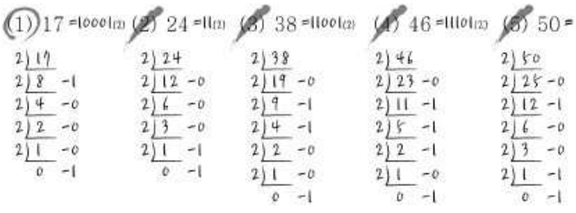
<2단계> <A>와 <B>를 관련시키면서, 수를 이진법으로 나타내는 알고리즘을 설명하고 적용하는 활동 을 한다.



[나] 예은이의 성취도 평가 답안지

1. 다음 빈칸에 알맞은 수를 넣어라.

2. 다음 수를 이진법으로 나타내어라.



73. [가], [나]에 대한 설명 중 가장 적절한 것은? (2점) [2010]

① <1단계>는 딘즈(Z. Dienes)의 개념 형성 과정 중 자유놀이 단계에 해당한다.

② 딘즈에 따르면, 지각적으로 다양한 상황은 혼란을 제공하므로 <1단계>에서 한 가지 지도 수단을 사용하는 것이 효과적이다.

③ <1단계>에서는 오수벨(D. Ausubel)의 통합 조정의 원리가 적용 되고 있다.

④ <2단계>에서 김 교사는 스켐프(R. Skemp)가 말하는 도구적 이해를 의도하고 있다.

⑤ 김 교사가 사용한 지도 수단이 [나]에서 평가의 대상이 되는 현상을 볼 수 있다.

74. [나]에서 예은이가 범한 오류에 대한 <보기>의 설명 중 적절한 것을 모두 고른 것은? (2점) [2010]

<보 기>

ㄱ. 예은이는 [나]에서 2번의 5에 대한 답으로 $10011_{(2)}$이라고 할 가능성이 많다.

ㄴ. 예은이의 오류를 교정하기 위해서는 <2단계> 활동에 대한 반성보다 <1단계>활동을 연습시키는 것이 필요하다.

ㄷ. 예은이가 [나]에서 2번의 1에서 정답을 맞힌 것은 주어진 수의 특성에 기인한 것으로 보인다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

75. 2007년 개정 수학과 교육과정에 제시된 교수·학습 방법과 관련된 내용 중, 다음의 수업 계획에서 알 수 있는 것과 가장 거리가 먼 것은? (1.5점) [2010]

<역동적 기하 소프트웨어를 활용한 수업 계획>

<1단계> 삼각형의 각 변 중점을 연결하여 새로운 삼각형을 만들고 두 삼각형 넓이의 비를 알아본다.

<2단계> 넓이의 비가 항상 4:1이 되는 이유를 각자 생각해보고 모둠별 토의를 거쳐서 각 모둠에서 학생 한 명이 모둠의 의견을 발표한다.

<3단계> 사각형의 각 변의 중점을 연결하여 새로운 사각형을 만들고 두 사각형 넓이의 비를 알아본다.

<4단계> 넓이의 비가 항상 2:1이 되는 이유를 생각해 보고 모둠별 토의를 거쳐서 각 모둠에서 학생 한 명이 모둠의 의견을 발표한다.

<5단계> 다른 다각형에 대해서도, 각 변의 중점을 연결하여 새로운 다각형을 만들고 두 다각형 넓이의 비에 대해 탐구한다.

① 탐구학습, 협동학습 등 다양한 교수·학습 방법을 사용한다.
② 구체적 조작 활동과 탐구 활동을 통하여 원리와 법칙을 발견하게 한다.
③ 귀납, 유추 등을 통해서 학생 스스로 수학적 사실을 추측하게 하고, 이를 정당화하거나 증명해 보도록 한다.
④ 수학적 의사소통 능력을 신장하도록 한다.
⑤ 학생 개인의 학습 능력과 수준을 고려한다.

76. 다음 문제에 대한 학생 A와 학생 B의 풀이 사례와 관련하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (2점) [2010]

<문 제>

수열 $\{a_n\}$이 $a_{n+1}=2a_n+1$, $a_1=1$을 만족하면, 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=2^n-1$임을 보이시오.

<학생 A의 풀이>

$n=1$인 경우, $a_n=2^n-1$에 $n=1$을 대입하면 $a_1=1$이므로 성립한다.

$n=k$일 때, $a_k=2^k-1$이 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때, 이므로, 이를 이용하면

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1}-1 \\ &= 2(2^k-1)+1 \\ &= 2a_k+1 \end{aligned}$$

이 되어 주어진 점화식이 만족된다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n-1$이다.

<학생 B의 풀이>

주어진 점화식을 만족하는 수열의 항을 몇 개 구해보면 $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=7$, $a_4=15$, $a_5=31$, $\cdots$ 이다.

이 때, $b_1=a_2-a_1=2$, $b_2=a_3-a_2=4$,

$b_3=a_4-a_3=8$, $b_4=a_5-a_4=16$ 이므로

수열 $\{a_n\}$의 계차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 2인 등비수열이다.

계차수열을 이용하여 a_n을 구하면

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2\times\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^n-1\text{이다.}$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=2^n-1$이다.

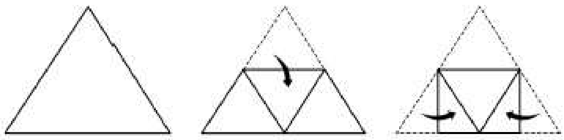
<보 기>

ㄱ. 학생 A는 연역적 증명을 시도하였다.
ㄴ. 학생 A는 전제조건과 증명해야 할 것을 혼동하고 있다.
ㄷ. 학생 B의 풀이는 확실성을 보장할 수 있는 방식이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

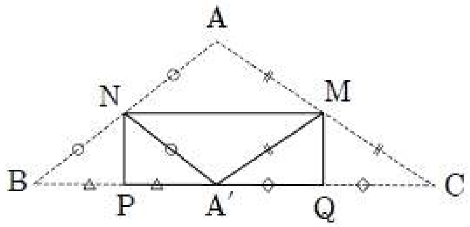
77. 가을, 봄이, 설빈이가 각이 겹치지 않게 하면서 삼각형의 세 꼭짓점이 한 변에서 만나도록 접는 방법에 대해 이야기하고 있다. 학생들의 대화에 대한 설명 중 옳은 것은? (2점) [2010]

가을 : 정삼각형의 각이 겹치지 않으면서 세 꼭짓점이 한 변에서 만나게 접는 방법을 보여줄게. 이렇게 접으면 돼.



봄이 : 그런데 어떤 삼각형이라도 그렇게 접을 수 있는 일반적인 방법이 있어?

설빈 : 접는 방법을 찾아보는 것이 어때? 삼각형 ABC를 그려서 접은 상태를 생각해 보자. 그러니까 세 꼭짓점이 한 변에서 만났다고 해보자.
점 N, P, Q, M은 접히는 지점을 나타내고, 점 A'은 세 꼭짓점이 모이는 지점이라고 하자.
그러면, $\overline{AN}=\overline{A'N}=\overline{BN}$ 이고 $\overline{AM}=\overline{A'M}=\overline{CM}$이 되잖아.



그러면, 점 N은 변 AB의 중점이 되고, 점 M은 변 AC의 중점이네.

가을 : 방금, 삼각형이 세 꼭짓점이 한 변에서 만나게 되는 것을 증명했네.

봄이 : 아직 증명이 마무리된 건 아니야.

① 가을이는 증명의 필요성을 제기하고 있다.
② 가을이는 분석법의 한계를 지적하고 있다.
③ 가을이는 연역적으로 증명하였다.
④ 봄이는 증명의 일반성에 대해 잘못 이해하고 있다.
⑤ 설빈이는 필요조건을 찾아가는 분석법을 구사하였다.

78. 다음은 학생들의 수학적 의사소통 능력을 신장시키기 위해 만든 문제 [가]와 학생들의 대화 [나]이다. [가]와 [나]에 대한 설명 중 가장 적절한 것은? (2점) [2010]

[가] 문제
<A>는 어떤 두 학급의 수학 성적을 각각 50점 미만인 집단과 50점 이상인 집단으로 나누어 비교한 것이다. 이로부터 추론해낼 수 있는 것을 말해보시오.

반	집단별 평균		학급 평균
1	50점 미만	20	45
	50점 이상	80	
2	50점 미만	10	60
	50점 이상	70	

<A> 1반과 2반의 수학 성적 비교

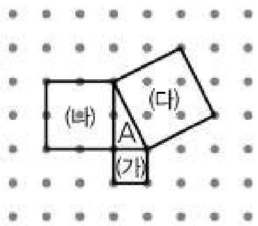
[나] 학생들의 대화
예리 : ㉠두 집단의 평균이 모두 높은 1반이 오히려 학급 평균은 2반보다 낮다는 것은 불가능해.
효진 : <A>에서 학급 평균이 아니라 최빈값을 구한 것은 아닐까?
예리 : 만일 모든 학생의 성적이 다르면 최빈값이 0이지. 그러니까 최빈값으로 두 반을 비교하는 것은 의미가 없어.
효진 : 어떤 점수에 해당하는 학생 수가 가장 많으면 그 학생 수가 최빈값이니까 최빈값은 여러 개가 있을 수 있어. 그래서 최빈값으로 두 반의 성적을 비교하는 것이 의미가 없지.
예리 : 그럼 <A>에서 학급 평균이 아니라 중앙값을 구한 것은 아닐까?
효진 : 잘 모르겠다.
교사 : ㉡1반에서 50점 이상인 학생들과 50점 미만인 학생들 중 어느 쪽이 더 많을까요?
예리 : 학급 평균이 역전될 수 있겠네요! 1반의 학생들 중 50점 이하가 절반이 넘으면 돼요.
효진 : 그렇구나. 그렇다면, 2반에서는 학생들 중 50점 이상이 절반이 넘겠네요.

① [가]는 수학적 추론을 요구하므로 의사소통 능력 신장을 위한 문제로 적합하지 않다.
② [가]의 정보가 부족하여 [나]에서 학생들이 ㉠의 옳고 그름을 정확히 판단하지 못하였다.
③ [나]에서 학생들이 거꾸로 풀기 전략을 이용하여 산포도를 구하고 있다.
④ [나]의 ㉡에서의 학생들이 해야 할 생각을 교사가 대신하여 주르뎅 효과(죠르단식 외면치레, Jourdain effect)가 나타났다.
⑤ [나]에서 예리와 효진이 모두 최빈값에 대한 오개념을 드러내고 있다.

79. 다음은 피타고라스 정리를 지도하는 예시이다. 이를 반 힐레(P. M van Hiele)의 교수·학습 단계 이론에 비추어 설명한 <보기>의 내용 중 적절한 것을 모두 고른 것은? (2.5점) [2010]

<1단계>
학습할 주제를 학생들에게 소개한다.

<2단계>
직각삼각형을 만들고 이 삼각형의 밑변, 높이, 빗변을 한 변으로 갖는 각각의 정사각형을 만든다. 정사각형 넓이를 구한다. (단, 밑변의 길이와 높이는 양의 정수)



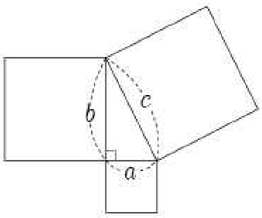
<3단계>
다른 직각삼각형을 몇 개 더 만들어 보고 각각의 삼각형에 <2단계>를 실시한다.

<4단계>
결과를 모두 다음과 같이 표에 기록한다.

직각삼각형	밑변의 길이	높이	(가)의 넓이	(나)의 넓이	(다)의 넓이
A	1	2	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

<5단계>
표를 보고 정사각형 넓이 사이의 규칙성을 찾아본다.

<6단계>
직각삼각형의 밑변의 길이, 높이, 빗변의 길이를 각각 a, b, c라 하고 그 각각의 변을 한 변으로 갖는 정사각형 넓이 사이의 규칙성을 식으로 표현한다.



<7단계>
역동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 직각삼각형에 대해서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하는지 알아본다.

<보 기>

ㄱ. <2단계>부터 <4단계>는 학습 주제를 탐구하고 구조를 점진적으로 파악하는 안내된 탐구 단계(제한된 탐구 단계, directed orientation)이다.
ㄴ. <6단계>는 학습한 아이디어를 명확하게 하는 발전/명료화 단계(explicitation)이다.
ㄷ. <7단계>는 다양한 해결 방법을 찾은 후 새로운 관련성을 찾는 자유탐구 단계 (free orientation)이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

80. 제3차 수학과 교육과정부터 현재까지 우리나라 수학과 교육과정 변천 과정에서 나타난 주요 특징으로 적절하지 않은 것은? (1.5점) [2011]

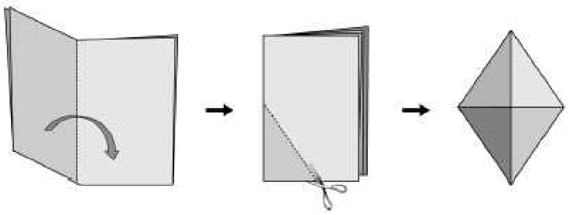
① 수학적 구조를 강조하고 집합 개념을 토대로 수학을 전개하며 수학의 논리적 엄밀성을 강조하였다.
② 학생의 생활 경험을 중시함으로써 생기는 단점을 해소하기 위하여 수학의 체계를 근간으로 수학 본연의 계통성을 중시하는 방향으로 선회하였다.
③ 단계형 수준별 교육과정으로 개인의 능력과 적성 등을 고려한 수학교육을 도모하였다.
④ 계산력 향상을 목표로 하지 않는 복잡한 계산과 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 가능하면 적극적으로 활용할 수 있게 하였다.
⑤ 최소의 필수 기본 지식 및 기능을 정선하고 문제 해결력과 정의적 측면을 강조하였다.

81. 라카토스(I. Lakatos)는 반례의 출현과 오류를 수정해 가는 과정이 수학의 발달에서 중요하다고 하였다. 반례를 찾는 활동이 수학교육 측면에서 지니는 긍정적 효과로 적절하지 않은 것은? (2점) [2011]

① 반례를 찾는 과정에서 기존에 학습한 수학적 지식을 통합하거나 견고하게 만들 수 있다.
② 반례를 찾는 과정을 통해 비판적 사고력을 신장시킬 수 있다.
③ 예외적인 경우를 찾는 활동을 통해 이전의 추측에서 고려하지 못한 부분을 생각해 보게 함으로써 사고의 엄밀성을 강화시킬 수 있다.
④ 결과에 이르게 된 과정이나 관련된 지식을 재음미시켜 수학적 힘을 신장시킬 수 있다.
⑤ 반례를 찾아 명제가 거짓임을 밝힘으로써 수학에서 거짓 명제가 의미 없다는 인식을 강화시킬 수 있다.

82. 다음은 중학교 도형 단원에서 선분의 수직이등분선 작도 방법의 도입을 위해 고안된 활동이다. 이 활동에 대한 설명으로 적절한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2011]

활동 그림과 같이 직사각형 모양의 색종이를 네 꼭짓점이 한 점에서 만나도록 가로와 세로로 한 번씩 접은 후, 점선을 따라 가위로 잘라 펼쳐 봅시다.



<보 기>

ㄱ. 파푸스(Pappus)의 '분석법적 아이디어'를 교수학적으로 구현한 것이다.
ㄴ. 주어진 선분의 양 끝점에서 거리가 같은 두 점을 찾기 위하여 컴퍼스를 이용할 수 있음을 알게 해 준다.
ㄷ. 이 활동을 통해 찾아 낸 작도 방법이 논리적으로 옳음을 정당화하기 위해서는 후속적인 절차가 필요하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

83. 피아제(J. Piaget)의 인지발달 이론에서 핵심적인 개념 중의 하나는 '반영적 추상화(reflective abstraction)'이다. 이 개념과 관련된 수학적 활동이나 과정의 예로 적절하지 않은 것은? (2.5점) [2011]

① 구체적인 세기를 통한 덧셈 활동이 덧셈 알고리즘으로 공식화되는 과정
② x를 $2x$로 대응시키는 활동이 함수 $y=2x$의 그래프 전체로 대상화(encapsulation)되는 과정
③ 다양한 모양을 보고 공통적인 외형을 인식하는 활동
④ 다양한 삼각형에서 두 변의 중점을 연결한 선분이 밑변의 길이의 반이 되고 밑변과 평행하다는 점을 확인하여 '삼각형의 중점연결정리'에 대한 가설을 설정하는 활동
⑤ 원 모양으로 배열되어 있는 공깃돌을 시계 방향과 시계 반대 방향을 각각 세어 본 후 결과가 같음을 확인하여 '세는 순서에 관계없는 개수는 일정하다.'고 인식하는 활동

84. 다음은 문제와 이에 대한 학생 (가)와 학생 (나)의 풀이 방법이다. 문제 풀이 방법에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? (2점) [2011]

> 문제 수직선 위의 두 점 $A(-3)$, $B(5)$를 이은 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 P의 좌표를 구하고 그 이유를 쓰시오.
>
> 풀이
>
> 학생 (가) : 두 점 사이의 거리는 $5-(-3)=8$이고, 3:!로 내분하므로 선분 AB는 네 등분되고 한 등분 길이는 $8/4=2$이다. 선분 AP의 길이는 한 등분 길이의 3배이므로 $2\times3=6$이고, 이것을 $A(-3)$에 더하면 내분점 P는 $-3+6=3$이다. 따라서 내분점 P의 좌표는 $P(3)$이다.
>
> 학생 (나) : 수직선 위의 두 점에 대해 선분을 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구하는 공식은 $P\left(\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)$이다. 이 공식에서 분모는 주어진 비의 두 수를 더하는 것이고, 분자는 비의 앞 수와 수직선의 오른쪽 좌표를 곱하고, 비의 뒤 수와 수직선의 왼쪽 좌표를 곱하여 더한 것이다. 분모는 $3+1=4$이고 분자는 $3\times5+1\times(-3)=15-3=12$ 이므로, 구하는 내분점 P의 좌표는 $P(3)$이다.

① (가)의 풀이에서 내분점의 공식이 구조적 대상으로 다루어지고 있다.
② (가)의 풀이에서 수직선 위에서의 조작 활동을 통해 내분점의 공식이 유도되고 있다.
③ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차적 지식이 사용되고 있다.
④ (나)의 풀이에서 내분점을 구하는 절차에 대한 반성 활동이 이루어지고 있다.
⑤ (가)와 (나)의 풀이에서 내분점의 공식에 대한 형식화된 개념 정의가 사용되고 있다.

85. 다음은 일차함수 단원에 나오는 문제와 풀이이다. 수학적 모델링 관점에서 볼 때, 이 풀이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? (1.5점) [2011]

> 문제 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동수 h회와 신체 나이 a세 사이에는 $h=-0.8a+176$인 관계식이 성립한다고 하자. 신체 나이가 15세에서 20세가 되었을 때 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동 수의 변화를 구하는 과정을 설명하시오.
>
> 풀이
>
> $a-15$를 대입하면 $h=-0.8\times15+176=164$이고, $a=20$을 대입하며 $h=-0.8\times20+176=160$이므로 $164-160=4$이다.
>
> 따라서 신체 나이가 15세에서 20세가 되었을 때 운동 중 분당 최대 한계 심장 박동 수는 4만큼 감소한다.

<보 기>

ㄱ. 실세계 상황을 수학 문제로 단순화시키는 활동이 포함되어 있다.
ㄴ. 수학적 모델 내에서 찾은 해를 해석하는 활동이 포함되어 있다.
ㄷ. 수학적 모델을 탐색하고 수정하는 활동이 포함되어 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

86. 유추한 결과가 거짓인 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2011]

<보 기>

ㄱ. ‘두 양수 x, y에 대하여 $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$가 성립한다.’에서 “세 양수 x, y, z에 대하여 $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$가 성립한다.”로 유추

ㄴ. ‘사다리꼴의 넓이는 $\{(\text{아랫변의 길이})+(\text{윗면의 길이})\}\times(\text{높이})\times\frac{1}{2}$ 이다.’에서 “각뿔대의 부피는 $\{(\text{아랫변의 넓이})+(\text{윗면의 넓이})\}\times(\text{높이})\times\frac{1}{3}$ 이다.”로 유추

ㄷ. ‘삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나다..’에서 사면체 각 면의 무게중심과 그 면에 마주보는 꼭짓점을 연결한 선을 사면체의 중선이라고 하면, “사면체의 네 중선은 한 점에서 만난다.”로 유추

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

87. 김 교사는 미분과 적분의 계산 방법을 지도한 후 ‘정적분의 활용’ 단원에서 속도와 거리 사이의 관계를 설명하고, 읽을거리 <A>를 학생들에게 제공하였다. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 이론 관점에서 볼 때, <A>와 김 교사의 수업에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? (2.5점) [2011]

<A>

14세기 수학자 오렘(Oresme)은 등가속도 운동 상황을 시각화 하기 위해 그래프를 창안하였다. 먼저 일정하게 속력이 변하면서 움직이는 물체가 이동한 거리를 조사할 때, 동일한 시간 간격에서 속력이 같은 양만큼 증가한다는 것을 이용하여, 높이가 속력이고 폭이 시간 간격인 직사각형을 연결하여 그래프로 나타내었다. 그리고 오렘은 시간 간격을 매우 작게 함으로써 직선과 수평선 사이의 삼각형의 넓이가 움직인 거리와 같다는 것을 보였다. 오렘에 의해 도입된 그래프 표현과 위의 아이디어는 이후 미적분학의 기본 정리 등을 포함한 미적분 발달에 결정적인 역할을 하게 되었다.

① <A>에서 수학자 오렘이 한 것처럼 학생은 수학화 과정을 경험하는 것이 바람직하다.
② <A>에서 그래프는 등가속도 운동이라는 현상을 조직화하기 위한 수단으로 이용된다고 볼 수 있다.
③ <A>에서 그래프는 수학화를 위한 모델이라고 할 수 있다.
④ 김 교사의 수업은 수학화 이론의 역사 발생적 원리를 따랐다고 볼 수 있다.
⑤ 김 교사의 수업은 수학화 활동보다 수학화 결과를 강조한 것이라 볼 수 있다.

88. 다음은 어느 교사가 출제한 고등학교 로그 단원의 평가 문항이다. 2007년 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 인지적 영역의 평가 항목 중 이 문항으로 평가하고자 하는 것으로 가장 적절한 두 개를 <보기>에서 고른 것은? (2점) [2011]

> 빛이 어떤 유리 한 장을 통과할 때마다 밝기가 1%씩 감소한다고 할 때, 빛이 이 유리 n장을 통과하면 밝기는 $(1-0.01)^n$배가 된다. 밝기가 100럭스(Lux)인 빛이 이 유리 10장을 통과했을 때 빛의 밝기를 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.
> (단, $\log 9.036 = 0.9560$, $\log 9.90 = 0.9956$으로 계산한다.

<보 기>

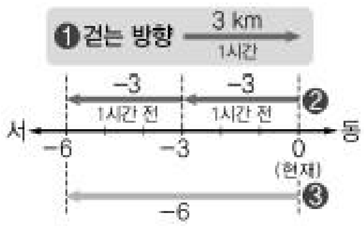
ㄱ. 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
ㄴ. 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
ㄷ. 수학적 지식과 기능을 활용하여 타당하게 추론하는 능력.
ㄹ. 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

① ㄱ, ㄷ ② ㄱ, ㄹ ③ ㄴ, ㄷ
④ ㄴ, ㄹ ⑤ ㄷ, ㄹ

89. <A>와 <B>는 2007년 개정 수학과 교육과정에 따른 중학교 1학년 교과서의 일부분이다. <A>와 <B>에서 음수의 연산을 다루는 방식에 관한 설명으로 적절하지 않은 것은? (2점) [2011]

<A >

(양의 정수) × (음의 정수) : $(+3)\times(-2)$
$(+3) \quad \times \quad (-2) \quad = \quad -6$



(음의 정수) × (양의 정수) : $(-3)\times(+2)$
$(-3) \quad \times \quad (+2) \quad = \quad -6$

<B >

①

5×	2	=	10
5×	1	=	5
5×	0	=	0
5×	(−1)	=	$\square$
5×	(−2)	=	$\square$

②

2	×5 =	10
1	×5 =	5
0	×5 =	0
(−1)	×5 =	$\square$
(−2)	×5 =	$\square$

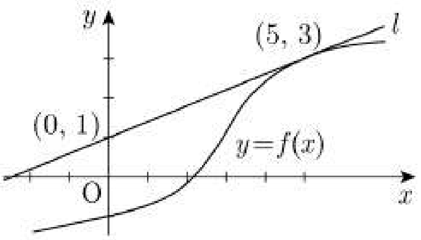
(1) 위 ①에서 규칙을 찾아보고, $\square$ 안에 알맞은 수를 말하여 보자.
(2) 위 ②에서 규칙을 찾아보고, $\square$ 안에 알맞은 수를 말하여 보자.

① <A>에서 음의 부호는 다중적인 의미를 가지지만 이것은 음수 개념 자체가 갖는 본질이라고 볼 수 있다.
② <A>와 같은 방식은 $(-6)/(-3)=2$ 꼴의 나눗셈은 설명할 수 없다는 한계를 가진다.
③ <A>와 같이 음수의 연산을 직관적 방법으로 지도하더라도 음수의 계산에 숙달되도록 많은 훈련이 필요하다.
④ <B>는 자연수 체계에서 인정된 성질이 유지되도록 수 체계와 연산을 확장하는 '형식불역의 원리'에 따라 음수의 곱셈을 도입하고 있다.
⑤ <B>와 같은 귀납적 확장은 기하학적으로 보면 반직선이나 선분이 직선으로 확장되면서 얻어지는 결과이다.

90. 다음은 고등학교 2학년 확률과 미적분에 대한 평가 문항과 이에 대한 정답률 및 답지 반응률이다. 최 교사는 이 자료에 근거하여 학생들의 이해 상태를 판단하였다. 적절하게 판단한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2011]

1. 공정한 동전을 6번 던질 때 '앞면-앞면-앞면-앞면-앞면-앞면'의 순서로 나올 확률을 a, '앞면-앞면-뒷면-뒷면-앞면-뒷면'의 순서로 나올 확률을 b라 하자. 옳은 것은?
   ① $a<b$ ② $a>b$ ③ $a=b$

2. 그림과 같이 직선 l이 점 $(5,3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f'(5)$의 값을 구하시오.



3. 다음 정적분의 값을 구하시오.
   (1) $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$ (2) $\int_{-2}^{1}(3x^2-4x+2)dx$

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">문항 번호</td><td rowspan="2">정답률 (%)</td><td colspan="3">답지 반응률(%)</td></tr>
<tr><td>①</td><td>②</td><td>③</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>25</td><td>70</td><td>5</td><td>25</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>17</td><td colspan="3" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>(1)</td><td>45</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>93</td></tr>
</table>

<보 기>

ㄱ. 사건의 독립성에 대한 이해가 부족한 경향이 있다.
ㄴ. 미분계수의 기하학적 의미에 대한 이해가 부족한 경향이 있다.
ㄷ. 스켐프(R. Skemp)의 관점에서 보면 정적분에 대한 '관계적 이해'가 이루어졌다고 볼 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

91. 다음은 어느 교사가 수학I '수열의 수렴과 극한값 계산'을 지도한 수업 장면이다. 이 교사는 수열의 수렴을 정의하고 극한값 구하는 문제를 풀이한 다음, 그 결과를 그래프 계산기로 보여주고 있다. 이 수업 장면에 대한 설명으로 적절하지 않은 것은? (2점) [2011]

<수열의 수렴 정의>

수열 $\{a_n\}$에서 n의 값이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 이 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하고, α를 극한값 또는 극한이라 한다.

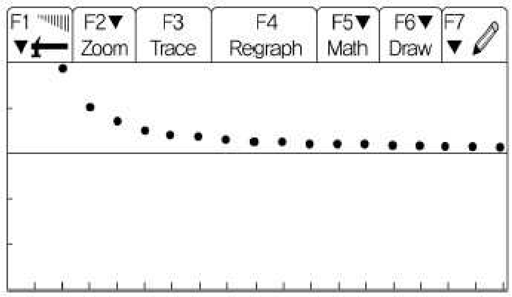
기호 : $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 또는 $n\to\infty$일 때, $a_n\to\alpha$

문제 $\dfrac{3n^2+2n-1}{n^2-1}$의 극한값은?

풀이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{3+0-0}{1-0}=3$$

그래프 계산기 결과 화면



① 그래프 계산기로 그린 수열 그래프를 수학적 대상으로 조작함으로써 학생이 추측하도록 유도하고 있다.
② 그래프 계산기를 사용한 시각화를 통해 즉각적인 피드백을 제공하고 있다.
③ 이 수렴 정의는 학생에게 상수(constant) 수열의 극한값이 존재하지 않는다는 오개념을 유발시킬 수 있다.
④ 이 수렴 정의는 직관적 정의로서 n이 변함에 따라 a_n이 변화하는 동적인 측면을 표현하고 있다.
⑤ '한없이 커질 때…한없이 가까워진다.'는 학생이 수열의 수렴을 일상적 언어로 이해하도록 정의한 것이다.

92. 다음은 중학교 수업의 한 장면이다. 이 장면에 대한 설명으로 적절한 것만을 <보기>에서 모두 고른 것은? (2점) [2011]

교사 : 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만나고 이 점이 삼각형의 외심이 된다는 것을 배웠습니다. 사각형의 경우에는 어떨까요?
자영 : 글쎄요. 아마도 사각형은 삼각형과 비슷하므로 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만날 것 같아요.
교사 : 확인해 봅시다.

[교사는 동적 기하 소프트웨어를 사용하여 다양한 예를 보여 준다.]

교사 : 한 점에서 만날 수도 있고 아닐 수도 있군요. 그럼 어떤 사각형일 때 한 점에서 만날까요? 삼각형 세 변의 수직 이등분선의 교점이 삼각형의 어떤 중심인지 한번 생각해 보세요.

[대답없음]

교사 : 삼각형에서 세 변이 수직이등분선의 교점은 외심입니다. 만약 사각형의 네 변의 수직 이등분선이 한 점에서 만난다면 그 점이 이 사각형의 외심이 되지 않을까요? 실제로 외심이 됩니다. 이 외심은 사각형의 외접원의 중심입니다. 정리하면 사각형이 원에 내접한다면 네 변의 수직이등분선은 한 점에서 만납니다.

<보 기>

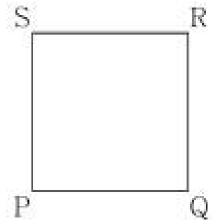
ㄱ. 동적 기하 소프트웨어를 학생 주도형의 구성주의적 관점에서 사용하고 있다.
ㄴ. 가르쳐야 한다는 교수학적 계약에 의한 압박으로, 토파즈 효과(토파즈식 외면치레, Topaze effect)가 나타날 가능성이 있다.
ㄷ. 학생의 유추와 이에 대한 교사의 반례 제시를 포함하고 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

93. 반 힐레(P. M. van Hiele)의 기하 학습 수준을 알아보기 위해 문항을 개발하였다. 문항 A는 m수준, 문항 B는 n수준의 도달 여부를 판단하기 위한 것이다. 반 힐레 이론의 관점에서 이 두 수준에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? (2점) [2011]

<문항 A>

사각형 $PQRS$는 정사각형이다. 옳은 것은?
① 선분 PR와 선분 RS의 길이는 같다.
② 선분 PS와 선분 QS의 길이는 같다.
③ 선분 QS와 선분 PR는 서로 수직이다.
④ 선분 PS와 선분 QR는 서로 수직이다.
⑤ 각 Q의 크기는 각 R의 크기보다 크다.



<문항 B>

두 문장
$S : \triangle ABC$의 세 변의 길이는 같다.
$T : \triangle ABC$에서 $\angle B$와 $\angle C$는 같다.
에 대하여 옳은 것은?
① S와 T는 동시에 참일 수 없다.
② S가 참이면 T도 참이다.
③ T가 참이면 S도 참이다.
④ S가 거짓이면 T도 거짓이다.
⑤ ①~④ 모두 거짓이다.

① m수준에서 다음 수준으로의 이행은 교육 내용이나 방법보다는 나이나 신체의 성숙에 달려 있다.
② m수준에서 추론하는 학생은 공리, 정의, 정리, 증명의 의미와 역할을 이해할 수 있다.
③ m수준에서는 도형이라는 대상을 도형의 성질이라는 수단에 의해 사고한다.
④ n수준에서는 명제가 사고의 대상이 되며 명제 사이의 논리적 관계가 정리의 수단으로 등장한다.
⑤ n수준에서 다음 수준으로의 이행을 위해서는 '안내된 탐구', '자유로운 탐구', '발전/명확화', '통합'의 4단계 순서로 교수·학습이 이루어져야 한다.

94. 19세기 말에 일어난 수학교육 근대화 운동에 대한 설명 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (1.5점) [2012]

<보 기>

ㄱ. 독일에서는 과학이 장려되면서 학교 교육에서 사회생활에 필요한 응용수학을 더 많이 다루어야 한다는 주장이 설득력을 얻어 수학교육을 개선하려는 시도가 이루어졌다. 이런 관점에서 클라인(F. Klein)은 교사들과 함께 메란(Meran) 교육과정이라는 김나지움(Gymnasium)의 수학 교수요목을 작성하였다.

ㄴ. 영국에서는 산업혁명으로 등장한 노동자 계급에 대한 교육이 요구되면서 학교수학에서 순수수학을 강조해야 할 필요성이 높아졌다. 이런 관점에서 페리(J. Perry)는 대수 공식을 이용하는 지식과 능력을 길러야 한다고 주장하였다.

ㄷ. 미국에서는 산업이 급격히 발전하면서 상공업적 실리, 실익을 추구하는 데 직접적인 도움이 되는 교육이 중시되었다. 이런 사회 분위기에서 무어(E. Moore)는 학교수학의 내용과 방법이 보다 풍부해져야 한다고 주장하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

95. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 방식에 따라 기하를 지도할 때, 학생들의 국소적 조직화에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2점) [2012]

<보 기>

ㄱ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형을 그 성질에 기초하여 인식하는 분석적 수준에 해당하는 활동이다.

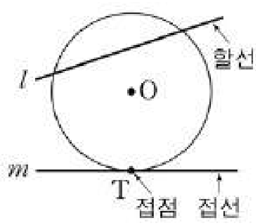
ㄴ. 학습자가 자신의 실제로부터 시작하여 기하 지식 체계를 조직하는 활동이다.

ㄷ. 수학자가 이론을 정립할 때 행하는 활동으로서 유클리드(Euclid) 『원론』의 조직화 방식과 동일하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

96. 접선에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? (2점) [2012]

오른쪽 그림과 같이 한 직선 l이 원 O와 두 점에서 만날 때, 직선 l을 원 O의 할선이라고 한다. 또한 직선 m이 원 O와 한 점 T에서 만날 때, 직선 m을 원 O의 접선, 점 T를 접점이라고 한다.



이 때 직선 m이 원 O에 접한다고 한다.

① 2007년 개정 교육과정에 따르면 위의 설명은 중학교 1학년 <수학>에서 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 접선을 정의하는 방식이다.

② 위의 설명은 이차함수의 그래프의 접선을 정의하는 데 적용할 수 있다.

③ $y=|x|$의 그래프는 위에 제시된 접선의 정의를 개선하기 위한 반례로 활용할 수 있다.

④ 2007년 개정 교육과정에 따르면 고등학교 1학년 <수학>에서는 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구할 때 판별식을 활용한다.

⑤ 2007년 개정 교육과정에 따르면 <미적분과 통계 기본>에서 접선은 미분가능성 및 미분계수의 기하학적 의미를 설명하면서 할선의 극한으로 다룬다.

97. A학생이 연립방정식의 활용 문제를 다음과 같이 해결하였다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2점) [2012]

> 문제
>
> 두 자연수의 합이 65이고 큰 수는 작은 수의 3배보다 5가 크다고 할 때, 두 자연수를 구하여라.
>
> A 학생의 풀이 과정
>
> 1단계) 큰 수를 x, 작은 수를 y로 놓는다.
>
> 2단계) x, y를 사용하여 문제의 뜻에 따라 연립방정식을 세우면 다음과 같다.
>
> $$x+y=65$$
>
> 3단계) 이 연립방정식을 풀면 $x=50$, $y=15$이다.
>
> 4단계) 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인해 보면 $50+15=65$, $50=3\times15+5$ 이므로 문제의 뜻에 맞는다.

<보 기>

ㄱ. 1단계는 문제에 주어진 조건과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 폴리아(G. Polya)가 말한 문제해결 계획을 수립하는 단계에 해당한다.

ㄴ. 숀펠드(A. Schoenfeld)가 언급한 문제해결 성공 요인 중 통제(control)는 위의 모든 단계에 적용될 수 있다.

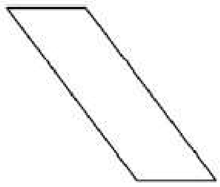
ㄷ. 4단계는 찾은 답이 문제의 조건에 합당한지 확인하는 단계로 폴리아가 말한 반성 단계에 해당한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

98. 수 개념에는 다양한 측면이 있으므로 수 개념 지도에도 다양한 관점과 방법이 존재한다. 다음 중 옳지 않은 것은? (2점) [2012]

① 프로이덴탈(H. Freudenthal)에 따르면 음수를 방정식의 근으로 정의하고 형식불역의 원리를 적용하여 음수의 연산을 지도해야 한다.
② 수직선 모델에서 음수를 표현하기 위한 음의 부호는 상황에 따라 왼쪽 방향이나 반대 방향을 뜻하므로 다중적인 의미를 갖는다.
③ 듀이(J. Dewey)에 따르면 고정 단위를 이용한 측정 활동을 하는 동안에 학생들이 분석과 종합의 과정을 경험하도록 수 개념을 지도해야 한다.
④ 피아제(J. Piaget)는 수 개념 지도에서 포함 관계에 의한 집합의 분류 활동과 서열화 활동에 대한 반영적 추상화를 강조한다.
⑤ 1960년대 미국에서 일어난 새수학 운동(New Math Movement)에서는 집합론의 기수(cardinal number) 개념을 강조하였다.

99. 어떤 교사 모임에서 문제해결의 심리학적 배경이 된 형태(게슈탈트) 심리학에 대해 연구하고 토론하였다. 논의 주제는 베르트하이머(M. Wetheimer)의 생산적 사고(productive thinking)에 관한 것으로 다음과 같다.

> 논의 주제
>
> 베르트하이머는 수업 시간에 학생들에게 오른쪽과 같은 평행사변형을 제시하고 이 도형의 넓이를 구하게 하였더니, 밑변과 수직이 되게 선을 긋지 못하였다. 결과적으로 학생들은 평행사변형의 넓이를 올바르게 구하지 못하였다.
>
> 

위의 논의 주제와 관련한 교사들의 대화 중 옳지 않은 것은? (2점) [2012]

① 김 교사 : 평행사변형을 직사각형으로 변형하면 (밑변)×(높이) 공식을 적용할 수 있는데, 학생들이 평행사변형과 직사각형의 관련성을 이해하지 못했습니다.
② 이 교사 : 베르트하이머의 생산적 사고는 공식의 맹목적인 적용이나 시행착오를 의미하는 것이 아닙니다.
③ 박 교사 : 학생들이 평행사변형의 넓이를 구하는 데 어려움을 겪은 것은 평행사변형의 넓이를 구하는 방법에 관한 구조적 이해, 즉 '통찰'이 결여되었기 때문입니다.
④ 정 교사 : 베르트하이머는 생산적인 사고 과정을 분리, 분류, 조직화 등의 사고 조작을 통해 문제의 '내적인 구조적 관련성'을 파악해 가는 것으로 간주하였습니다.
⑤ 강 교사 : 베르트하이머는 전체에 대한 부분의 구조적 기능을 파악하여, 부분의 구조적 특성에 합치되는 방향으로 전체의 재구조화가 일어남을 강조하였습니다.

100. 미적분의 역사적 발달과 관련한 설명 중 옳지 않은 것은? (1.5점) [2012]

① 고대 그리스 시대에는 극한 개념이 없었기 때문에, 아르키메데스(Archimedes)는 실진법(착출법, method of exhaustion)으로 포물선과 할선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하였다.
② 갈릴레이(G. Galilei)는 낙하하는 물체가 움직인 거리는 그 물체의 속도를 나타내는 직선과 시간축 사이에 생기는 삼각형의 넓이라고 보는 관점을 제시하였다.
③ 카발리에리(B. Cavalieri)의 불가분량법(method of indivisibles)에서 평면도형의 불가분량은 현이고, 입체도형의 불가분량은 단면이다.
④ 뉴턴(I. Newton)이 미분의 아이디어를 설명할 때 아주 작은 양 o을 사용한 것에 대해 버클리(G. Berkeley)는 o을 엄밀하지 않게 이중적으로 사용했다고 비판하였다.
⑤ 라이프니츠(G. Leibniz)는 물체의 운동과 그 변화를 나타내기 위해 역학적 관점에서 미분의 아이디어를 생각하였다.

101. 반 힐레(P. van Hiele)는 학생들의 사고 발달 및 학습 수준의 상승이 교사의 지도 과정에서 다음과 같은 단계들을 거쳐 이루어진다고 하였다. 이 단계들을 옳은 순서로 나열한 것은? (2점) [2012]

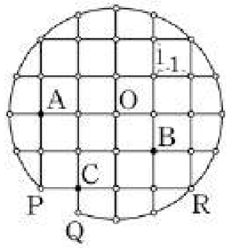
(가) 학생은 교사가 제공한 자료로 교사의 안내 하에 학습 주제를 탐구하면서 해당 분야의 구조를 점진적으로 파악하게 된다.
(나) 학생은 예정의 경험과 교사의 도움말을 토대로 탐구분야의 구조에 대한 자신의 견해를 표현하며 관계 체계를 형성하기 시작한다.
(다) 학생은 교사가 제공한 자료를 토대로 교사와의 충분한 논의를 통해 탐구 분야에 친숙해지기 위한 활동을 하면서 학습 주제를 파악하게 된다.
(라) 학생은 자신의 학습을 재검토하여 그동안 배운 새로운 개념에 대한 탐구 활동을 개관하며 전체를 조망하게 되면서 사고 수준의 비약에 이르게 된다.
(마) 학생은 보다 복잡한 과제 해결에 도전하여 여러 가지 해결 방법을 찾아봄으로써 탐구 분야의 구조에 정통하게 된다.

① (가) → (나) → (다) → (마) → (라)
② (나) → (다) → (가) → (라) → (마)
③ (나) → (다) → (가) → (마) → (라)
④ (다) → (가) → (나) → (마) → (라)
⑤ (다) → (나) → (가) → (라) → (마)

102. 최 교사는 기하 영역에서 실생활과 관련된 문제를 학생들에게 제시하고 학생들이 문제를 해결하는 동안 아래와 같은 발문을 하였다.

문제

그림은 어느 도시의 도로망을 나타낸 것으로, 정사각형 모양을 이루는 간선 도로는 교차로 간의 거리가 모두 1로 일정하고, 도시의 순환 도로는 O를 중심으로 하는 원의 일부로 되어 있다.



A, B, C 대리점을 소유하고 있는 한 유통 회사에서 순환 도로 위의 P, Q, R중 한 곳에 물품 창고를 세우려고 한다. 이 때 물품 창고에서 도로를 따라 A, B, C 대리점에 이르는 거리의 합이 최소인 곳이 가장 적당하다고 하면, 어디에 세우는 것이 가장 좋겠는가?

교사 발문

(가) 그림의 O가 원점이 되도록 도로망을 좌표평면 위에서 생각해 보아라.
(나) A, B, C는 각각 좌표평면의 어느 점과 대응되는가?
(다) P에서부터 A, B, C까지의 거리의 합을 구해 보아라.
(라) 위의 (다) 과정을 Q, R에 대해서도 적용해 보아라.

최 교사의 발문과 관련하여 다음 중 옳은 것은? (2.5점) [2012]

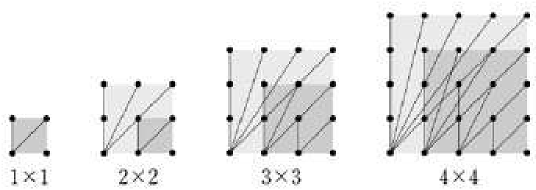
① (가)와 (나)는 원리나 공식 등의 내용을 이해하는 데 도움을 주는 반면, (다)와 (라)는 그 내용과 관련된 문제를 익숙하게 연습시키는 데 적절하다.
② (가)와 (나)는 이 문제의 풀이 방법이 떠오르지 않을 때 관련된 유사한 문제를 먼저 풀어 보게 하는 것으로, 이는 문제를 수월하게 해결하는 수단이 된다.
③ (가), (나), (다)는 문제해결을 위한 계획 단계에, (라)는 검토 단계에 제시하는 것이 적절하다.
④ (다), (라)와 같은 발문은 자칫하면 학생들이 스스로 탐구하거나 시행착오를 거쳐 학습할 수 있는 환경을 방해할 수 있다.
⑤ 위와 같은 발문은 전반적으로 학생들의 개인화와 배경화를 강조하기 보다는 형식화된 수학 지식을 전달하기 위함이다.

103. 김 교사는 수업 시간에 학생들에게 한 변의 길이가 5인 기하판, 즉 5×5 기하판에 못을 연결하여 서로 다른 길이의 선분을 최대한 몇 개나 만들 수 있는지 찾아보게 하였다. 그 결과, A학생은 풀이 과정을 다음과 같이 제시하고 20으로 답하였으나, 실제로 정답은 19이다.

A 학생의 풀이 과정

5×5 기하판 위에 1×1 정사각형부터 시작하여 4×4 정사각형에 이르기까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 모두 구해 보았다. 그 결과, 다음과 같은 규칙을 얻었다.

(서로 다른 길이의 선분의 수)
=(이전 정사각형에서 구한 선분의 수)+(새로 만든 선분의 수)



정사각형의 크기	서로 다른 길이의 선분의 수
1×1	2 = 2
2×2	(2)+3 = 5
3×3	(2+3)+4 = 9
4×4	(2+3+4)+5 = 14

이 규칙을 5×5 정사각형에 적용한 결과, 서로 다른 길이의 선분의 수는 (2+3+4+5)+6 = 20(개)이다.

A학생이 해결한 방법과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2점) [2012]

<보 기>

ㄱ. A학생이 5×5 정사각형에 자신이 발견한 규칙을 적용한 것은 선입견이나 부주의 등으로 인하여 관찰해야 할 사례를 간과하고 조급하게 일반화한 것이다.

ㄴ. A학생은 일부 사례로부터 일반적 결론을 이끌어 내기 위하여 수학적 귀납법을 사용하였다.

ㄷ. A학생은 1×1 정사각형부터 4×4 정사각형까지 서로 다른 길이의 선분의 수를 구한 방식을 형식불역의 원리에 의해 5×5 정사각형에 적용하였다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ,ㄷ

104. 다음은 중학교 수업에서 유리수와 순환소수의 관계를 지도하는 상황의 일부이다.

교사 : 지난 시간에 여러분은 순환소수를 배웠어요. 오늘은 유리수와 순환소수의 관계를 배워 봅시다. 순환소수의 예를 한 가지만 들어 볼까요?

학생 : 0.99999⋯가 있습니다.

교사 : 좋아요. 순환소수 0.99999⋯에서는 9가 무한히 반복되는데, 그렇다면 0.99999⋯는 1과 같을까요?

학생 : 1에 아주 가까이 가기는 하지만 1은 아닐 것 같습니다.

교사 : 그럼 0.99999⋯를 분수로 고쳐서 1과 같은지 알아봅시다.

$x = 0.99999\cdots$ ⋯⋯ ①

라고 놓읍시다. ①의 양변에 10을 곱하면

$10x = 9.99999\cdots$ ⋯⋯ ②

이고, ②에서 ①을 변끼리 빼면

$9x = 9$

이므로 $x = \frac{9}{9} = 1$ 입니다.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2.5점) [2012]

<보 기>

ㄱ. 학생의 순환소수에 대한 생각에는 가능적 무한(잠재적 무한, potential infinity) 개념이 반영되어 있다.

ㄴ. APOS(Action Process Object Schema) 이론에 의하면 교사가 지도하는 극한 개념은 학생의 극한 개념이 '내면화'된 수준에 해당한다.

ㄷ. 교사가 0.99999⋯ =1임을 보이는 과정은 무한급수가 수렴하지 않는 경우에 적용하였을 경우 모순된 결과를 가져올 수 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

105. 다음은 모의실험 프로그램을 활용한 수업이다.

교사 : 오늘 수업에서는 컴퓨터로 모의실험을 해 볼 거예요. 위쪽에서 공을 떨어뜨리면 판 위에 규칙적으로 박혀있는 못에 부딪혀 바닥에 있는 빈칸 가운데 하나로 들어가게 되요. 100개의 공을 하나씩 떨어뜨렸을 때 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수는 어떻게 분포될지 한번 예상해 보세요.

학생 : 각 칸에 들어가는 공의 개수가 비슷할 것 같습니다.

교사 : 그럼 이 프로그램으로 실험을 해 볼까요? (모의실험 프로그램을 실행한다.)

교사 : 자, 어떤 결과가 나왔나요?

학생 : 각 칸에 들어간 공의 개수가 비슷하지 않습니다.

교사 : 왜 그럴까요?

학생 : 아무래도 가운데 칸으로 떨어지기가 쉬울 테니까 공이 양 끝에 있는 칸으로 떨어질 가능성이 가운데 칸으로 떨어질 가능성보다 낮을 것 같습니다.

교사 : 그렇지요. 지금 여러분은 바닥에 있는 칸들에 들어간 공의 개수가 따르는 분포가 근사적으로 정규분포를 이룬다는 것을 알아냈어요.

위의 수업 상황과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는대로 고른 것은? (2점) [2012]

<보 기>

ㄱ. 위의 수업에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 발생하였다.

ㄴ. 위의 모의실험 프로그램은 중심극한정리(central limit theorem)를 학습할 수 있는 환경을 제공한다.

ㄷ. 위의 모의실험 프로그램은 이 수업에서 학생들의 학습을 안내하는 교사의 역할을 대신하였다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

106. 다음 문항과 관련하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (2점) [2012]

문항

다음은 세 명의 야구 선수 A, B, C가 최근 5경기에서 기록한 안타 수이다. 경기 당 안타 수가 가장 고른 선수는 누구이겠는가? 그 이유를 설명하여라.

A : 1, 3, 3, 1, 2
B : 0, 4, 0, 4, 2
C : 1, 3, 0, 4, 2

<보 기>

ㄱ. 현재 수학 학습의 평가에서는 2007년 개정 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수해야 하므로, 이 문항은 중학교 2학년에서 다뤄질 수 있다.

ㄴ. 이 문항은 분산, 표준편차 등의 수학 용어를 사용하여 수학적으로 표현해 봄으로써 의사소통 능력을 기르는데 도움이 될 수 있다.

ㄷ. 이 문항은 해결 결과뿐만 아니라 해결 과정도 중시하고 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

107. 제2차 세계대전 후 일어난 '수학교육 현대화 운동'에 대한 설명으로 옳은 것은? [1.5점] [2013]

① 논리적 엄밀성을 강조하지는 않았으나, 대수적 구조는 강조 하였다.
② 무어(E. Moore)는 학교수학에서 순수수학과 응용수학을 극명하게 구분하려는 잘못된 경향이 만연해 있음을 비판 하였다.
③ 톰(R, Thom)은 학교수학에서 엄밀한 공리적 취급은 타당하지 않으며, 집합과 논리와의 결합은 잘못된 것이라고 비판하였다.
④ 듀돈네(J. Dieudonné)는 현대수학의 조기 도입을 주장 하였으나, 응용적 가치가 높은 유클리드 기하의 내용은 강조하였다.
⑤ 클라인(F. Klein)은 미적분과 해석기하를 조기에 도입하되, 그 기초적인 내용을 자연 현상과 관련지어 지도하자는 입장을 취하였다.

108. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교육 내용 및 교수-학습상의 유의점에 대한 설명으로 옳은 것은? [2013]

① 지수와 로그는 ‘수학 Ⅱ’ 과목에서 다루고, 지수함수와 로그함수는 ‘미적분 Ⅱ’ 과목에서 다룬다.
② 중학교에서 다루었던 집합은 ‘수학 Ⅱ’ 과목으로 이동 하였으나, 함수를 다루는 데 필요한 정의역, 공역, 치역 용어는 중학교에서 다룬다.
③ 중학교에서 이진법은 삭제하였으나, 실생활에서 유용하게 활용되는 근삿값과 오차의 한계는 중학교에서 다룬다.
④ 중학교에서 작도는 삼각형을 작도하는 정도로만 다루고, 이를 이용하여 삼각형의 결정조건을 이해하도록 한다.
⑤ 등식의 성질, 정비례, 반비례, 줄기와 잎 그림, 회전체는 초등학교의 학습량 경감을 위하여 중학교로 이동하여 다룬다.

109. 스켐프(R. Skemp)의 이해와 관련된 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것은? [2013]

① 등식의 성질을 이해하지 못하고 이항하여 일차 방정식을 푸는 것은 도구적 이해의 예이다.
② 도구적 이해는 문제를 푸는 공식에 초점을 두기 때문에 관계적 이해보다 기억의 지속력이 더 강하다.
③ 관계적 이해를 통해 만족감을 얻게 되면, 새로운 자료도 관계적으로 이해하게 되고 능동적으로 찾게 된다.
④ 새로운 개념을 지도할 때 동화나 조절이 잘 이루어지도록 기존의 스키마를 잘 활용하는 것은 관계적 이해를 도모하기에 적절하다.
⑤ 관계적 이해는 무엇을 해야 할지 왜 그런지를 모두 알고 있고 일반적인 수학적 관계로부터 특수한 규칙이나 절차를 연역할 수 있는 능력이다.

110. 딘즈(Z. Dienes)는 놀이를 통한 수학 개념의 학습과정을 다음과 같이 여섯 단계로 제시하였다.

1단계	2단계	3단계	4단계	5단계	6단계
자유 놀이	(가)	(나)	(다)	(라)	형식화

위의 (가), (나), (다), (라)에 들어갈 것으로 모두 옳은 것은? [2013]

	(가)	(나)	(다)	(라)
①	게임	표현	공통성의 탐구	기호화
②	게임	공통성의 탐구	표현	기호화
③	게임	공통성의 탐구	기호화	표현
④	공통성의 탐구	표현	게임	기호화
⑤	공통성의 탐구	게임	표현	기호화

111. 다음은 다면체에 대한 오일러(L. Euler)의 추측, 이에 대한 개략적 증명, 그와 관련된 세 가지 사례를 제시한 것이다. 라카토스(I. Lakatos)의 오류주의 수리철학의 입장에서 옳은 설명인 것은? [2.5점] [2013]

오일러의 추측

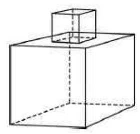
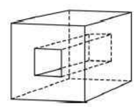
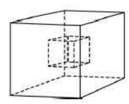
다면체의 꼭짓점, 모서리, 면의 개수를 각각 V, E, F라 할 때, $V-E+F=2$이다.

개략적 증명

[1단계] 탄력이 좋고 속이 비어 있는 다면체를 상상 하고서 그 다면체의 어떤 한 면을 제거한 후, 제거된 면에 다른 면들이 편면 그물처럼 펼쳐지도록 만든다. 이때, 면이 1개 줄게 되므로, 본래의 다면체에 대하여 $V-E+F=2$ 임을 보이는 것은 평평한 그물에 대해 $V-E+F=1$ 임을 보이는 것과 같다.

[2단계] 모든 면이 삼각형이 될 때까지 각 면에 대각선을 긋는다. 대각선을 1개 그을 때마다, E, F는 각각 1개씩 늘어나므로 $V-E+F$의 값은 변하지 않는다.

[3단계] 삼각형으로 분할된 그물에서, 모서리와 면을 1개씩 없애거나 모서리 2개, 꼭짓점 1개, 면 1개를 없애는 방식으로, 삼각형을 하나씩 제거하여 단 하나의 삼각형만 남도록 한다. 삼각형을 제거하는 과정에서 $V-E+F$의 값은 변하지 않고 마지막에 남은 삼각형에 대해 $V-E+F$의 값은 1이 되므로, 원래의 추측을 증명한 것이다.

사례 ㉠	사례 ㉡	사례 ㉢
		
정육면체에 작은 정육면체 볏이 달린 입체	정육면체에 네모 구멍이 뚫린 입체	정육면체 속에 작은 정육면체가 비어있는 입체

① 사례 ㉠은 [1단계]와 [2단계]를 통과하지만 [3단계]는 통과하지 못한다.
② 사례 ㉢은 [1단계]를 통과하지 못하는 국소적 반례인 동시에 추측을 반박하는 전면적 반례이다.
③ 괴물배제법은 사례 ㉠, ㉢과 같은 전면적 반례를 수용해서 원래의 추측이 틀렸다고 인정하는 방법이다.
④ 사례 ㉠은 [1단계]에 대한 국소적 반례인데, 그 반례를 가지고 [1단계]를 분석하는 과정을 통해 '단순 연결된 면을 가진 다면체'라는 개념을 생성해 낼 수 있다.
⑤ 예외배제법은 사례 ㉠, ㉡과 같은 전면적 반례를 다면체의 예외적인 경우로 인정하고 원래의 추측에 그 예외를 언급한 조건절을 첨가하는 것이기 때문에, 다면체의 정의를 정교화 하는데 기여한다.

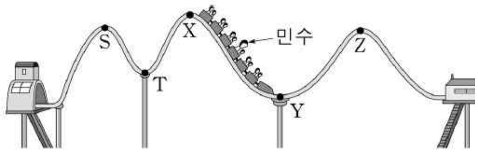
112. 폴리아(G. Polya)의 수학관 및 수학 문제해결 교육론에 대한 설명으로 가장 적절한 것은? [2013]

① 수학 문제해결 과정에서 학생이 교사의 시범을 모방하는 것은 바람직하지 않다.
② 수학적 지식의 발견은 귀납에 의해서가 아니라 하나의 전형적인 예에 대한 관찰에 의해 이루어진다.
③ 수학 문제해결 과정에서 인내하고 작은 진전의 가치를 인식하는 것과 같은 정의적 측면의 교육을 중요시 하였다.
④ 수학 문제해결 과정에서 문제와 관련된 요소를 재조직하고 그 요소 사이의 관련성을 파악하게 하는 측면을 간과하였다.
⑤ 문제제기 활동은 해결의 실마리나 단서를 찾고 주의를 집중하는 데 방해가 되므로 문제해결의 계획 단계에서 하지 않는 것이 바람직하다.

113. 다음은 함수의 극대와 극소에 대한 수업 상황 (가), (나) 에서 교사와 학생이 나눈 대화의 일부이다.

(가)

김 교사: 오늘은 함수의 극대와 극소에 대하여 알아보려고 합니다. ([그림]을 제시하며) 이 그림은 놀이 공원의 궤도 열차가 움직이는 모습을 옆에서 바라본 것입니다. 이 열차에 타고 있는 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 위에 위치하게 되는 지점을 말해보세요. 또 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 아래에 위치하는 지점을 말해보세요.



[그림]

학생 A: [그림]의 점 S, X, Z에서 민수가 바로 앞의 승객과 바로 뒤의 승객보다 위에 위치하게 됩니다. 그리고 점 T와 Y에서 아래에 위치합니다.

김 교사: 네, 그래요. 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 [그림]의 궤도 열차가 지나가는 길과 같은 모양일 때, 함수 $f(x)$의 증감상태를 살펴봅시다.

(나)

박 교사: 함수 $g(x)=|x|$는 극값을 갖나요?

학생 B: $g(x)=|x|$의 그래프 모양이 뾰족해서 극값을 갖지 않습니다. 함수들이 극값을 가질 때는 그 그래프 모양이 항상 매끄러운 곡선이었거든요.

박 교사: 극값을 갖는지 알려면 극대, 극소의 정의를 알아야 합니다. (곧바로 함수의 극대와 극소의 정의를 말한 후) $g(x)=|x|$는 $x=0$의 좌우에서 감소상태가 증가 상태로 바뀌죠?

학생 B: (대답없음)

박 교사: 그러니까 $x=0$에서 극솟값을 갖겠죠?

학생 B: (대답없음)

위의 수업 상황 (가), (나) 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. (가) 에서 김교사는 함수의 극대와 극소의 의미를 개인화/배경화(personalization/contextualization)시키고 있다.
ㄴ. (나) 에서 학생 B는 함수의 그래프가 매끄러운 곡선 모양일 때만 극값을 가진다는 개념이미지를 지니고 있다.
ㄷ. (나) 에서는 조르단 효과(주르뎅 효과, Jourdain effect)가 나타났다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

114. 함수의 역사적 발달과 관련된 설명 중 옳은 것은? [1.5점] [2013]

① 함수는 주로 정적인 맥락, 즉 여러 상황에 대한 동시 고려의 필요성이 제기되는 맥락에서 17세기 무렵부터 의식적으로 사용되기 시작하였다.
② 함수 기호 $f(x)$는 17세기말 라이프니츠(G. W. Leibniz)와 베르누이(J. Bernoulli)의 서신 교환에서 사용되었다.
③ 오일러(L. Euler)는 함수를 '어떤 양이 다른 양에 종속 된다면 전자를 후자의 함수'라고 표현하였고, 이후에 '변하는 것과 어떤 상수가 결합된 크기'로 새롭게 표현 하였다.
④ 디리클레(Dirichlet) 함수의 출현은 독립변수와 종속변수의 구분이 명확해지는 결정적 계기가 되었다.
⑤ 부르바키(Bourbaki) 학파는 집합 이론에 기초하여 '순서 쌍의 집합의 부분집합'이 어떤 특정한 조건을 만족할 때, 그 부분집합을 함수로 정의하였다.

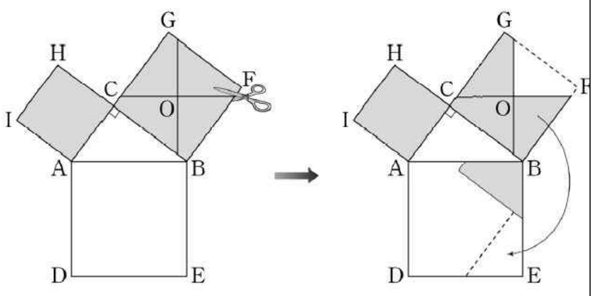
115. 다음은 중학교에서 다루는 피타고라스 정리에 관한 문제 이다.

문제

직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 그려서 다음과 같은 [단계 1], [단계 2]를 통해 피타고라스 정리가 성립함을 설명하여라.

[단계 1]
정사각형 $CBFG$의 두 대각선의 교점 O를 지나고 두 변 AB와 BE에 평행한 선분을 각각 긋고, 그어진 선을 따라 4개의 사각형을 오린다.

[단계 2]
[단계 1]에서 오려 낸 4개의 사각형과 정사각형 $ACHI$를 정사각형 $ADEB$에 채워 본다.



[단계 1] [단계 2]

위의 문제 에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

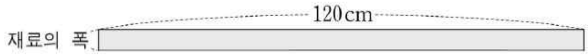
ㄱ. 수학적 아이디어를 구체적 조작과 탐구 활동을 통하여 정당화할 수 있는 예이다.
ㄴ. 반 힐레(P. van Hiele)가 제시한 기하 학습 수준에서 도형의 구성 요소와 성질에 주목하여 이를 인식하는 기술적/분석적 수준에 해당하는 활동의 예이다.
ㄷ. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 비추어 볼 때, 위의 문제 를 해결한 후 가정, 결론 용어를 사용하는 연역적 증명 방법에 의한 교수·학습이 뒤따라야 한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

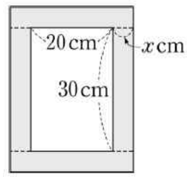
116. 다음은 A 교사가 제시한 과제와 B 모둠이 제출한 답안이다. 이와 관련된 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2.5점] [2013]

A 교사가 제시한 과제

사진을 액자에 넣기 위해 액자틀을 만들 때, 사진의 크기나 액자틀의 폭에 따라 필요한 재료의 길이가 달라진다. 가로의 길이 20cm, 세로의 길이 30cm인 사진을 넣기 위해 직사각형 모양의 액자를 만들려고 한다. 아래 그림과 같은 120cm 길이의 재료를 남김 없이 사용하여 액자틀을 만들었다면 액자틀의 폭은 얼마인가? (단, 액자틀의 폭과 재료의 폭은 같으며, 재료의 두께는 고려하지 않는다.)



B 모둠의 답안



[가] 이 문제를 해결하기 위해서 필요한 액자틀의 폭을 $x$cm, 재료의 길이를 $y$cm라 한다.
[나] 액자틀의 가로의 길이는 $20+2x$(cm)이므로,
$y=2\{(20+2x)+30\}=4x+100$이다.
[다] 문제에서 주어진 재료의 길이는 120cm이므로,
$120=4x+100$
$x=5$
따라서 폭이 5cm인 액자틀을 만들 수 있다.
[라] 우리 모둠에서는 사진의 크기와 액자틀의 폭이 달라짐에 따라 필요한 재료의 길이에 대해서도 알아보았다.
그 결과, 사진의 가로의 길이가 $a$cm, 세로의 길이가 $b$cm, 액자틀의 폭이 $x$cm일 때, 필요한 재료의 길이를 $y$cm라 하면
$y=2\{(a+2x)+b\}=4x+2(a+b)$이다.

<보기>

ㄱ. [가]는 수직적 수학화에 해당한다.
ㄴ. [나]에서는 문제 상황에 영향을 미치는 요인들의 관계를 수학적으로 해석하여 주어진 문제 상황에 적합한 모델을 구축하였다.
ㄷ. [라]는 [가], [나], [다]를 통해 얻은 결과를 일반화한 것이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

117. 확률과 통계의 교수-학습에 대한 논의 중 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

<보기>

ㄱ. 물리적으로 비대칭적인 압정이나 윷은 라플라스(P. S. Laplace)의 고전적 확률 정의가 적용되지 않는 상황이 있음을 이해시키는 데 교수-학습 소재로 이용될 수 있다.

ㄴ. 2009 개정 교육과정에 따른 중학교 수학과 교육과정에 의하면, 확률은 실험이나 관찰 상황에서 구한 상대도수로서의 의미와 경우의 수의 비율로서의 의미를 연결하여 이해하게 한다.

ㄷ. 어느 도시 인구의 40%정도가 안경을 쓴 사람이라고 할 때 5명 중 2명은 반드시 안경을 쓴 사람일 것이라 생각하는 것과 같이, 학생들이 ‘작은 표본이어도 모집단과 유사하다.’고 생각하는 경향은 교수-학습을 통해 교정되어야 할 필요가 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

118. 다음은 김 교사가 평가도구 개발 단계에서 제작한 고등학교의 도형의 방정식에 대한 문항과 그 채점 기준이다. 이에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [2013]

문항

어떤 공장에서 제품 A, B를 P, Q 두 팀으로 나누어 생산하고 있다. 이때 제품 A, B를 각각 1톤 생산하는데 필요한 시간과 제품에서 얻는 이익은 아래 표와 같다.

제품	1톤 생산하는 데 필요한 시간		이익
	P팀	Q팀	
A	2시간	2시간	30만원
B	1시간	3시간	20만원

하루에 일하는 시간이 P팀은 8시간, Q팀은 12시간을 초과 할 수 없다고 할 때, 이 공장에서 하루에 제품 A, B를 생산하여 얻을 수 있는 최대 이익은 얼마인지 구하여라. 풀이 과정과 답을 쓰시오. [10점]

문항 정보

평가 목표	행동 영역			
부등식의 영역을 활용하여 최대, 최소 문제를 해결할 수 있다.	계산	이해	추론	문제해결

채점 기준

채점 요소	배점
문제 상황을 연립부등식으로 나타낸다.	2점
연립부등식이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 나타낸다.	3점
하루 이익이 최대인 경우를 찾는다.	3점
최대 이익(130만원)을 구한다.	2점

<보기>

ㄱ. 문항은 주어진 수학 외적 상황과 수학 내용의 관련성을 파악하여 문제를 해결한다는 측면에서 볼 때, 문항 정보의 행동 영역에서 문제해결로 분류하는 것이 적절하다.

ㄴ. 문항은 개방형 문제(open-ended problem)로서, 수학적 개념과 기능을 학생들이 얼마나 습득하고 이를 적용할 수 있는지를 평가하기에 적합하다.

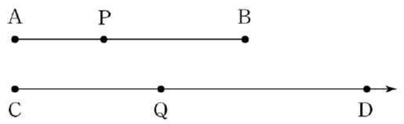
ㄷ. 채점 기준은 분석적 점수화 방법에 따라 만들어진 기준으로, 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 과정을 구체화하여 각 과정별로 채점 요소를 정해 점수를 부여한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

119. 프로이덴탈(H. Freudenthal)의 수학화 교수・학습 이론에 따르면, 아래의 2가지 사항은 현상으로부터 본질에 이르는 접근이 아니라 학습자에게 본질을 부과하는 접근이다. 프로이덴탈은 이와 같은 교수학적 접근 방식을 무엇이라 하였는지 쓰시오. [2점]

> ◦ 기성 수학의 전개 순서에 따라 학교수학의 교재를 구상하는 것
> ◦ 수학화 과정에 대한 경험은 생략하고 기성 지식을 초등화해 가르치는 것

120. 다음은 어떤 수학적 개념의 원형과 그 개념에 들어있는 아이디어를 다룬 교사 교육용 자료의 일부이다.

> ・이 개념의 원형은 다음과 같다.
>
> [그림]과 같이 선분 AB와 반직선 CD에 대하여, 선분 AB 위의 점 P와 반직선 CD 위의 점 Q가 각각 A와 C로부터 같은 속도로 동시에 출발하여 각각의 선을 따라 움직인다고 하자. 이 때 점 P의 속력은 PB의 거리에 비례하고, 점 Q의 속력은 일정하다고 하자.
>
> 
>
>
> 이때, 거리 CQ를 거리 PB의 (　)(이)라고 하였다.
>
> ・다음은 이 개념에 들어있는 아이디어를 활용한 계산의 한 예이다.

n	⋯	1005	⋯	1009	⋯	2014	⋯
$(1.0001)^n$	⋯	1.1057181	⋯	1.1061604	⋯	1.2231016	⋯

> 이 표를 활용하면, $1.1057181 \times 1.1061604$의 근삿값을 쉽게 얻을 수 있다.
>
> ⋯ (하략) ⋯

(　) 안에 들어갈 용어가 무엇인지 쓰시오. 그리고 수학을 완성된 생산품으로 제공하는 것이 아니라 수학이 발생해 온 과정을 경험하게 하기 위해 수학적 개념의 원형이나 그 개념에 들어있는 아이디어를 활용하는 교수・학습 원리가 무엇인지 쓰시오. [2점]

121. 다음은 중학교 2학년 기하 영역의 평행사변형의 성질을 다루는 수업의 일부이다.

> 교사 : 측정 활동을 통해 알아낸 평행사변형의 성질 '두 쌍이 대각의 크기가 각각 같다.'가 왜 성립하는지 설명해 보도록 하지요.
> 학생 : 어려워요.
> (이 문제를 해결한 학생이 없는 듯 보인다.)
> 교사 : <u>시간이 없으니 어쩔 수 없네. 대각선을 그어 평행사변형을 두 삼각형으로 나누면, 그 두 삼각형이 합동이 돼요. 그러면 그 성질이 성립한다는 것을 바로 보일 수 있을 것입니다.</u>
> 학생 : 합동이 되니까 성립하네요.
> 교사 : 그러면 다음 내용을 공부합시다.

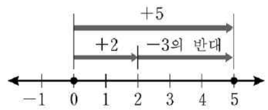
밑줄 친 부분에서 학생 스스로 학습할 환경을 교사가 제거하는 현상이 발생하고 있다. 여기서 이 교수학적 현상은 '교사는 수학적 지식을 가르쳐야 하고 학생은 그것을 배워야 한다.'는 압박에 의해 발생한다고 할 수 있다. 브루소(G. Brousseau)의 수학 교수학적 상황론(Theory of Didactical Situations in Mathematics)에서 이러한 현상을 설명할 수 있는 개념과 이러한 압박을 설명할 수 있는 개념을 각각 쓰시오. [2점]

122. 다음은 중학교 1학년 기하 영역에서 모든 다각형의 외각의 크기의 합이 360°임을 알아내는 수업 상황이다.

> (학생들은 삼각형의 외각의 크기의 합이 360°임은 알고 있지만, 아직은 n각형의 외각의 크기의 합을 구할 수 없는 상태이다.)
>
> … (상략) …
>
> 교사 : (그림을 제시하며) 다각형의 각 꼭짓점에서 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
>
> 학생 : 180°입니다.
>
> 교사 : 그러면 n각형의 모든 내각과 외각의 크기의 합은 얼마인가요?
>
> 학생 : $180° \times n$입니다.
>
> 교사 : 외각의 크기의 합은 어떻게 구할 수 있을까요?
>
> 학생 : 잘 모르겠어요.
>
> 교사 : 내각과 외각의 관계를 생각해 보면 외각의 크기의 합을 구할 수 있지 않을까요? (다각형에 외각과 내각을 표시하면서 외각과 내각의 관계를 떠올리게 한다.)
>
> 학생 : 아! 알겠어요. 내각과 외각의 크기의 합에서 내각의 크기의 합을 빼면 될 것 같아요.
>
> 교사 : 내각의 크기의 합은 알고 있지요?
>
> 학생 : 네. $(n-2)\times 180°$입니다.
>
> 교사 : 그러면 외각의 크기의 합을 구하는 식을 나타낼 수 있을까요?
>
> 학생 : (외각의 크기의 합)
> $=180°\times n-$(내각의 크기의 합)
> $=180°\times n-180°\times(n-2)=360°$입니다.
>
> 교사 : 잘했어요. 따라서 다각형에서 외각의 크기의 합은 언제나 360°로 일정함을 알 수 있어요.
>
> … (하략) …

위 상황에서 교사는 학생의 근접 발달 영역에서 교사의 사고 과정을 모방할 수 있는 시범이나 실마리를 제공하고 있다. 이러한 교수・학습 상황에서 학생들이 과제를 수행해 나가는 데 있어서 도움을 적절히 조절하며 제공하는 것을 비고츠키(L. Vygotsky) 학파는 무엇이라 하는지 쓰시오. [2점]

123. 다음은 정수의 사칙연산을 지도하기 위한 셈돌 모델, 수직선 모델, 귀납적 외삽법에 대한 예시이다.

셈돌 모델	$2+(-3)=-1$	●●+○○○=○
수직선 모델	$2-(-3)=5$	
귀납적 외삽법	$2\times(-3)=-6$	$2\times 2=4$ $2\times 1=2$ $2\times 0=0$ $2\times(-1)=-2$ $2\times(-2)=-4$ $2\times(-3)=-6$

124. 다음은 폴리아(G. Polya)의 수학적 문제해결 교육론에 근거해 어떤 문제를 해결한 과정의 일부이다.

> <이해 단계>
> 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 파악하면서 문제를 분석한다. 구하려는 것을 x로 놓는다.
>
> <계획 단계>
> 문제에서 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관계를 파악하고, 그러한 관계를 나타내는 방정식을 세운다. 이 때 방정식이 참이라고 하자.
> $$\sqrt{2x-6}=3-x$$
>
> <실행 단계>
> 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-8x+15=0$이고, $(x-3)(x-5)=0$이므로 $x=3$ 또는 $x=5$이다. 그런데 이 조건은 주어진 방정식이 참이 되기 위한 필요조건이다.
>
> <반성 단계>
> $x=3$ 또는 $x=5$가 주어진 방정식을 참이 되게 하는 충분조건도 되는지 알아본다. $x=3$은 충분조건이지만 $x=5$는 충분조건이 아니다. 따라서 $x=3$이 주어진 방정식을 참이 되게 하는 필요충분조건이다.
> $x=3$이 문제의 상황에 부합하는지의 여부를 점검한다.

위 문제해결 과정에서는 수학적 발견술인 분석법이 사용되고 있다. <계획 단계>와 <실행 단계>에서 분석법이 어떻게 사용되고 있는지 각각 설명하시오. [3점]

125. 다음은 중학교에서 확률 개념을 도입하는 수업의 일부이다. 이 수업 이전에, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에 따라 '가능성'은 초등학교 5-6학년군에서 다루어 졌고 '상대도수', '사건', '경우의 수'는 중학교에서 이미 다루어졌다고 하자.

> 김 교사 : 오늘은 가능성의 크기를 어떻게 구하는지에 대해 공부하려고 해요. 이와 관련해 일어날 가능성이 가장 큰 사건을 찾는 활동을 해 봅시다. 예를 들어 두 주사위를 던졌을 때, 두 주사위의 눈의 합이 나올 수 있는 사건의 수는 11입니다. 합이 2인 사건부터 12인 사건까지 나올 수 있는 것이지요. 그 11가지 사건 중에서 일어날 가능성이 가장 큰 사건은 무엇일까요?
> 학생들 : 11가지 사건이 일어날 가능성은 서로 같을 것 같은데요.
> 김 교사 : 왜 그렇게 생각하나요?
> 학생들 : 그냥 서로 같을 것 같아요.
> 김 교사 : 그러면 두 주사위를 던지는 실험을 통해 여러분의 예상이 맞을지에 대해 알아보도록 하지요.
>
> 12개의 모둠을 편성해서 모둠마다 두 주사위를 30번씩 던지고, 던진 횟수에 대해 각 사건이 나온 횟수를 기입하는 방식으로 상대도수를 나타낸 아래의 표를 완성 하였다.

	두 주사위의 눈의 합										
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30회 상대도수	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(2)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(4)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(5)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(3)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$	$\frac{(1)}{30}$
60회 상대도수	$\frac{(2)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(5)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(11)}{60}$	$\frac{(9)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(6)}{60}$	$\frac{(3)}{60}$	$\frac{(1)}{60}$
360회 상대도수	$\frac{(9)}{360}$	$\frac{(21)}{360}$	$\frac{(32)}{360}$	$\frac{(38)}{360}$	$\frac{(51)}{360}$	$\frac{(59)}{360}$	$\frac{(50)}{360}$	$\frac{(39)}{360}$	$\frac{(31)}{360}$	$\frac{(19)}{360}$	$\frac{(11)}{360}$

> 김 교사 : 우리가 예상한 것과 상당히 다른 결과가 나온 이유가 뭘까요? 왜 그런지 생각해 봅시다.
> 학생 A : 제 생각에는 11가지 사건이 일어날 가능성이 원래부터 서로 같지 않아서 그런 것 같아요. 각 사건에 들어있는 경우의 수를 잘 세어야 해요.
> 김 교사 : 그 가능성이 어떻게 서로 다른지에 대해 자세히 설명해줄 수 있나요?
> 학생 A : 네. 두 주사위의 눈의 합이 나오는 사건의 수는 11이 맞습니다. 하지만 두 주사위의 눈이 나오는 경우의 수는 $(1,1),(1,2),(1,3),\cdots,(5,6),(6,1),\cdots,(6,6)$과 같이 36입니다.

이후, 학생 A는 두 주사위의 눈의 합이 2인 사건부터 12인 사건 각각에 포함된 경우들을 언급하면서, 전체 경우의 수에 대한 해당 사건에 포함된 경우의 수를 세어서 11가지 각 사건이 일어날 가능성이

$\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$

임을 설명하였다.

김 교사 : 실험 결과에서 합이 2인 사건부터 12인 사건까지의 상대도수가 서로 비슷하지 않은 이유가 무엇인지 알겠어요?

학생들 : 네. 알 것 같아요. 원래 가능성이 서로 달랐기 때문에 실험 결과에서도 서로 다르게 나온 것 같아요.

학생 B : 그러고 보니까, 학생 A가 제시한 각각의 가능성이 실험을 통해 나온 각각의 상대도수와 거의 같아요.

김 교사 : 좋은 관찰입니다. …(중략)… 어떤 사건이 일어날 가능성을 확률이라 합니다. 이제 우리가 오늘 했던 활동을 바탕으로 일반적으로 확률을 어떻게 구하면 될지 생각해 볼까요?

학생 A : 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때에는 그 사건에 들어있는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누면 구할 수 있어요.

학생들 : ㉠선생님, 다른 상황에서도 어떤 사건이 일어날 확률을 구할 때 각각의 경우는 항상 같은 가능성을 가지고 있다고 생각하면 되는 거지요?

김 교사 : ㉡지금 질문한 내용이 중요합니다. 여러분이 확률을 구해야 하는 상황에서 흔히 잘못 생각하는 부분이 있어요. 정육면체 주사위와 직육면체 주사위를 던진다고 생각해 봅시다. …(중략)… 실험도 해 볼까요. …(중략)… 이런 점을 잘 고려해서, 어떤 사건이 일어날 확률은 어떻게 구하면 되고 이때 무엇에 유의해야 하는지 정리해 볼까요. … (하략) …

2009 기정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 중학교 확률과 통계 영역 <교수・학습상의 유의점> 2가지 사항과 확률 직관에 대한 피시바인(E. Fischbein)의 이론을 적용하여, 김 교사는 '경우의 수의 비율'로 확률 개념을 도입하고 있다.

김 교사의 수업에서 확률과 통계 영역의 <교수・학습상의 유의점> 2가지 사항이 각각 어떻게 적용되고 있는지 설명하시오. 그리고 학생이 확률을 배우기 이전부터 가지고 있던 '확률 직관의 특성'과 '확률 직관 발달의 특성'에 대한 피시바인의 이론을 각각 설명하고, 위의 밑줄 친 ㉠과 ㉡에서 그러한 피시바인의 이론이 어떻게 적용되고 있는지 각각 설명하시오. [10점]